

DEVOIR SURVEILLE N° 8

EXERCICE 1

7 points

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Question de cours :

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. On considère les points $A(1; 2; -3)$, $B(-3; 1; 4)$ et $C(2; 6; -1)$.

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées $(-5; 9; 4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

f. Le plan P a pour équation cartésienne $x + 2y - 2z - 4 = 0$. Déterminer la position relative des plans P et (ABC).

EXERCICE 2

4 points

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

- a. $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ b. $\frac{9}{8}$ c. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ d. $\frac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

- a. 0 b. $\left(\frac{1}{8}\right)^3$ c. $\frac{23}{128}$ d. $\frac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0; 1]$ lorsque

- a. $m = -1$ b. $m = \frac{1}{2}$ c. $m = \frac{1}{e^2}$ d. $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0, 2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

- a. $1 - \frac{1}{e}$ b. $\frac{1}{e}$ c. $\frac{1}{5e}$ d. $\frac{1}{0,2}(e - 1)$

EXERCICE 3

9 points

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$
2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n) .

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

- a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$.
- b. Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$.
- c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur \mathbb{N}^* par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

- a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq S_n$.
- b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0 , on ait $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
- c. En déduire l'égalité $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$
- d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$.
- e. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $f(n) + f(n+1) + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$.
- f. Déterminer la limite de la suite (u_n) .