CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N° 4

EXERCICE 1 :

Partie A : 1. Les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ sont les fonctions f_k définies par $f_k(x) = ke^{2x}$.

2. a) La fonction u est solution de l'équation différentielle (1) si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$, soit $(ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x$, soit $(-ax + a - b)e^x = xe^x$, soit $-ax + a - b = x$. Par identification, on trouve $a = -1$ et $b = -1$. Donc $u(x) = -(x+1)e^x$.

b) Une fonction v est solution de l'équation (2) si et seulement si $v'(x) - 2v(x) = 0$ équivaut à $v'(x) - 2v(x) = xe^x - u'(x) + 2u(x)$, équivaut à $v'(x) + u'(x) - 2u(x) - 2v(x) = xe^x$, équivaut à $(v(x) + u(x))' - 2(u(x) + v(x)) = xe^x$, équivaut à $u + v$ est solution de (1).

3. Les solutions de (1) sont donc les fonctions $u + v$ où v est solution de l'équation (2) et $u(x) = -(x+1)e^x$, soit les fonctions $ke^{2x} - (x+1)e^x$.

4. La solution f de l'équation (1) qui s'annule en 0 vérifie $f(x) = ke^{2x} - (x+1)e^x$ et $f(0) = 0$, soit $f(0) = k - 1 = 0$, donc $k = 1$. Et $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$.

Partie B : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x-2) = +\infty$. On peut écrire $g(x) = 2e^x - x - 2 = e^x(2 - xe^{-x} - 2e^{-x})$.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $g'(x) = 2e^x - 1$.

$g'(x) \geqslant 0$ si $2e^x - 1 \geqslant 0$, soit $e^x \geqslant 0{,}5$ soit $x \geqslant \ln 0{,}5 = -\ln 2$.

Donc g est croissante sur $[-\ln 2; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; -\ln 2[$.

Le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction g est continue car dérivable sur $]-\infty; -\ln 2[$ et strictement décroissante de $]-\infty; -\ln 2[$ dans $]-\infty; g(-\ln 2)]$.

Or $g(-\ln 2) = 2e^{-\ln 2} + \ln 2 - 2 = \ln 2 - 1 \simeq -0{,}31 < 0$. Donc $0 \in\,]-\infty; g(-\ln 2)]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty; -\ln 2[$. La fonction g est aussi strictement croissante de $[-\ln 2; +\infty[$ dans $[g(-\ln 2); +\infty[$ qui contient 0. Or $g(0) = 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution 0 dans $[-\ln 2; +\infty[$.

4. A l'aide de la calculatrice, on trouve $-1{,}60 < \alpha < -1{,}59$.

5. Ainsi, la fonction g est positive sur $]-\infty; \alpha] \cup [0; +\infty[$ et négative sur $[\alpha; 0]$.

Partie C :

1. On peut écrire $f(x) = e^{2x}(1 - (x+1)e^{-x})$. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-(x+1)e^{-x}) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont. Et $f'(x) = 2e^{2x} - (x+2)e^x = e^x \times g(x)$.

Comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$.

3. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 2 :

1. a) Si B_1 est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$, alors $z_{B_1} - z_A = \sqrt{2}(z_B - z_A)$,

soit $z_{B_1} = \sqrt{2}(2 - i) + i = 2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$.

b) Si B' est l'image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$, alors $z_{B'} - z_A = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_{B_1} - z_A)$,

soit $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{4}}(2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) - i) + i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2\sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) - i) + i = 3 + 2i$.

c) Placer les points A, B, B_1 et B'.

2. On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 1$.

a) On a $z' = (1+i)z_B + 1 = 2(1+i) + 1 = 3 + 2i = z_{B'}$, donc B a pour image B' par f.

b) Le point invariant par f vérifie $z' = z = (1+i)z + 1$, soit $-iz = 1$, soit $z = \dfrac{1}{-i} = i$.

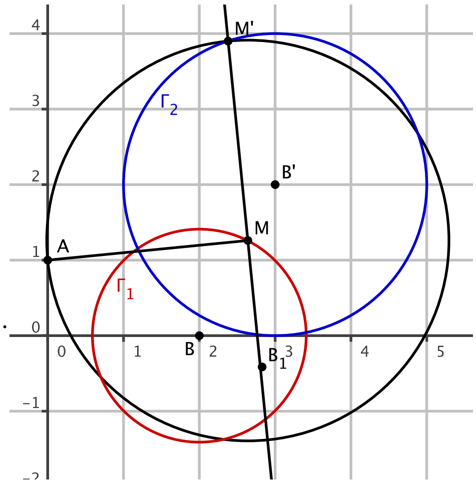
Donc A est le seul point invariant par f.

c) Pour tout nombre complexe z distinct de i, $\dfrac{z'-z}{i-z} = \dfrac{(1+i)z+1-z}{i-z} = \dfrac{iz+1}{i-z} = \dfrac{-i(i-z)}{i-z} = -i$.

d) Interprétation : $\left|\dfrac{z'-z}{i-z}\right| = \dfrac{MM'}{MA} = |-i| = 1$, donc MM' = MA.

$\text{Arg}\left(\dfrac{z'-z}{i-z}\right) = (\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MM'}) = \arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, donc $(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MM'}) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

e) Pour construire le point M', on trace le cercle de centre M et de rayon MA, puis on trace la perpendiculaire à (MA) passant par M; cette droite coupe le cercle en M'.



3. a) L'ensemble Γ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie $|z-2| = \sqrt{2}$ est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.

b) On a $z' - 3 - 2i = (1+i)z + 1 - 3 - 2i = (1+i)z - 2 - 2i = (1+i)(z-2)$.

c) Donc, si le point M appartient à Γ_1, alors $|z-2| = \sqrt{2}$,
donc $|z' - 3 - 2i| = |z' - z_{B'}| = |(1+i)(z-2)| = |1+i|\sqrt{2} = 2$.
Ainsi l'image M' de M par f appartient au cercle Γ_2 de centre B' et de rayon 2 .

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie sur $]3\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x-3) - \ln(4x)$.

1. La fonction f est dérivable sur $]3\,;+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

De plus $f(x) = 2\ln(x-3) - \ln(4x) = \ln(x-3)^2 - \ln 4 - \ln x$. D'où $f'(x) = 2\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-(x-3)}{x(x-3)} = \dfrac{x+3}{x(x-3)}$ qui est du signe du numérateur puisque $x > 3$. Ce numérateur est strictement positif, donc la fonction f est strictement croissante sur $]3\,;+\infty[$.

2. On cherche à résoudre cette inéquation sur $]3\,;+\infty[$. $f(x) \leqslant 0$ équivaut à $\ln(x-3)^2 - \ln 4 - \ln x \leqslant 0$ équivaut à $\ln\left(\dfrac{(x-3)^2}{4x}\right) \leqslant \ln 1$ équivaut à $\dfrac{(x-3)^2}{4x} \leqslant 1$ équivaut à $(x-3)^2 \leqslant 4x$ équivaut à $x^2 - 6x + 9 \leqslant 4x$ équivaut à $x^2 - 10x + 9 \leqslant 0$. Le discriminant $\Delta = 100 - 36 = 64 = 8^2$. L'équation $x^2 - 10x + 9 = 0$ a deux solutions $x_1 = \dfrac{10-8}{2} = 1$ et $x_1 = \dfrac{10+8}{2} = 9$. Ainsi, $x^2 - 10x + 9 \leqslant 0$ si $x \in [1; 9]$;
donc la solution de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$ est [3; 9].

Question subsidiaire:

On écrit $f(x) = 2\ln(x-3) - \ln(4x) = \ln\left(\dfrac{(x-3)^2}{4x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)^2}{4x} = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty$.

Et car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-3)^2}{4x} = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.