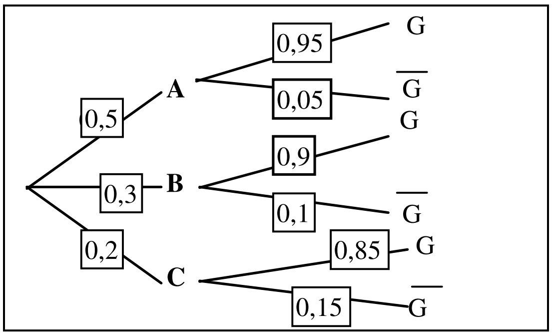
CORRECTION DE L'EVALUATION **BRAIN-PREPA**

EXERCICE 1



a) L'arbre pondéré :
b) La probabilité de l'événement : « L'ampoule est bonne et fabriquée par A » = p(A∩G) = 0,5 x 0,95 = 0,475.
c) La probabilité de l'événement : « L'ampoule est bonne » = p(A∩G) + p(B∩G) + p(C∩G) =
0,475 + 0,3x0,9 + 0,2x0,85 = 0,915 .
d) On cherche la probabilité de A sachant G :

$$p_G(A) = \frac{p(A\cap G)}{p(G)} = \frac{0{,}475}{0{,}915} \approx 0{,}519 .$$

e) Les valeurs prises par X sont 0, 1, 2. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

k	0	1	2
p(X = k)	0,007	0,155	0,837

L'espérance mathématique de X est E(X) = 1 x 0,155 + 2 x 0,837 = 1,829.

EXERCICE 2

On a $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2+2i$. D'où l'équation devient : $\bar{z}z-2z = 2+2i$; soit $x^2+y^2-2(x+iy) = 2+2i$

soit $x^2+y^2-2x = 2$ et $-2y = 2$; d'où $y = -1$ et $x^2 - 2x - 1 = 0$; $\Delta = 8 > 0$ donc deux solutions :

$x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $x_2 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$; on a $z_1 = 1+\sqrt{2}-i$ et $z_2 = 1-\sqrt{2}-i$. Le module de z_1 est

$|z_1| = |1+\sqrt{2}-i| = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ et le module de z_2 est $|z_2| = |1-\sqrt{2}-i| = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

EXERCICE 3 : 1. a) La fonction g est dérivable sur]0 ; +∞[comme somme de fonctions dérivables.

$$g'(x) = 3x^2-1-\frac{2}{x} = \frac{3x^3-x-2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x} .$$

b) Etude du signe de $3x^2 + 3x + 2$: $\Delta = -15 < 0$ donc ce trinome est du signe de a soit > 0 ; le signe de $g'(x)$ est donnée par $(x - 1)$; donc g est croissante sur [1 ; +∞[et décroissante sur]0 ; 1[. Le minimum de $g(x)$ est $g(1) = 1 > 0$ donc $g(x) > 0$ sur]0 ; +∞[.

2. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ car $f(x) = x+\frac{x+ln(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+ln(x)}{x^2} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(x)}{x^2} = 0$.

b) $f'(x) = 1-\frac{1}{x^2}+\frac{x^2\times\frac{1}{x}-2x\,ln(x)}{x^4} = 1-\frac{1}{x^2}+\frac{1-2\,ln(x)}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$; Le tableau de variations de f :

x	0	+∞
$f'(x)$	‖ +	
$f(x)$	‖ -∞ ↗	+∞

c) La droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f si

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$; or $f(x)-x = \frac{1}{x}+\frac{ln(x)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{ln(x)}{x^2} = 0$.

Donc la droite (d) est asymptote oblique à C_f .

3. a) $h'(x) = 1+\frac{1}{x} > 0$ sur]0 ; +∞[donc la fonction h est continue et strictement croissante de]0 ; +∞[dans IR ; donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans]0 ; +∞[.

b) Valeur approchée de α à 0,1 près : On a $h(0{,}5) \approx -0{,}19$ et $h(0{,}6) \approx 0{,}089$ donc $\alpha = 0{,}6$ à 0,1 près .

c) Les positions relatives de (d) et C_f sont déterminées par le signe de $f(x)-x = \frac{1}{x}+\frac{ln(x)}{x^2} = \frac{x+ln(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$. Le signe de cette quantité est le signe de $h(x)$; donc, pour $x \in\ ]0 ; \alpha[$, $h(x) < 0$ et C_f est au dessous de (d) ; pour $x \in\ ]\alpha ;+\infty[$, $h(x) > 0$ et C_f est au dessus de (d) .