

**EXERCICE 1 ( 6 points )**

Tous les résultats seront donnés à  $10^{-3}$  près.

Trois machines fabriquent des ampoules halogènes dans les proportions suivantes : 50% pour la machine A, 30% pour la machine B, 20% pour la machine C.

L'usine procède à des tests pour déterminer la fiabilité des différentes machines. Les résultats montrent que la fiabilité des machines A, B, C est respectivement : 0,95 ; 0,90 ; 0,85.

Dire que la fiabilité de A est de 0,95 signifie que la probabilité qu'une ampoule fabriquée par A soit bonne est de 0,95.

On choisit une ampoule au hasard dans un lot fabriqué par l'usine. L'événement : « L'ampoule est bonne » est noté G.

a) Représenter la situation proposée à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Déterminer la probabilité de l'événement : « L'ampoule est bonne et fabriquée par A ».

c) Montrer que la probabilité de l'événement : « L'ampoule est bonne » est égale à 0,915 .

d) On achète une ampoule, elle est bonne. Déterminer la probabilité qu'elle ait été fabriquée par A .

e) On achète deux ampoules. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules bonnes. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique.

**EXERCICE 2 ( 4 points )**

Pour  $x$  et  $y$  réels, on pose :  $z = x + iy$  ,  $\bar{z} = x - iy$  .

Déterminer les réels  $x$  et  $y$  tels que  $\bar{z}z - 2z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  ; on note  $z_1$  la solution de cette équation de partie réelle positive et  $z_2$  l'autre. Déterminer les modules de  $z_1$  et  $z_2$  .

**EXERCICE 3 ( 10 points )**

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $g(x) = x^3 - x - 2\ln(x) + 1$  .

a) Montrer que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$  ,  $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$  .

b) Etudier les variations de la fonction  $g$  puis déterminer le signe de  $g(x)$  .

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$  et  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

a) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

b) Montrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$  ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  , puis donner le tableau de variations de  $f$  .

c) Vérifier que la droite (d) d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à  $C_f$  .

3. On considère la fonction  $h$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $h(x) = x + \ln(x)$  .

a) Etudier le sens de variations de  $h$  et montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$ .

b) Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à 0,1 près.

c) Utiliser les résultats de 3.a) pour déterminer les positions relatives de (d) et  $C_f$  .