

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 4

EXERCICE 1 : PARTIE A : 1.a) Réalisation de l'arbre.

b) La probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche est $p(A \cap I) = 0,01 \times 1/500 = 1/50000$.

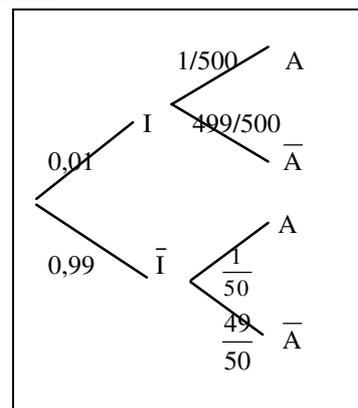
c) La probabilité que l'alarme se déclenche est $p(A) = p(A \cap I) + p(A \cap \bar{I}) = 1/50000 + 0,99 \times 1/50 = 1489/50000 = 0,02978$.

2. La probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut est :

$$p(\bar{A} \cap I) + p(\bar{A} \cap \bar{I}) = 0,99 \times 49/50 + 0,99 \times 1/50 = 991/50000 = 0,01982.$$

3.. La probabilité qu'il y ait réellement un incident sachant que l'alarme vient de se

$$\text{déclencher est } p_A(I) = \frac{p(A \cap I)}{p(A)} = \frac{499}{50000} \times \frac{50000}{1489} = \frac{499}{1489}.$$



PARTIE B : a) La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 100, 10000, 15000,

avec les probabilités : $p(X = 0) = p(\bar{A} \cap \bar{I}) = \frac{99}{100} \times \frac{49}{50} = \frac{4861}{5000}$; $p(X = 100) = p(A \cap \bar{I}) = \frac{99}{5000}$;

$$p(X = 10000) = p(A \cap I) = \frac{499}{500} \times \frac{1}{100} = \frac{499}{50000} \text{ et } p(X = 15000) = p(\bar{A} \cap I) = \frac{1}{50000}.$$

b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 100 \times p(X = 100) + 10000 \times p(X = 10000) + 15000 \times p(X = 15000) = 5104/50 = 102,08$ euros .

EXERCICE 2 : PARTIE A : On considère la fonction g définie sur] 0 ; +∞ [par $g(x) = x^2 - \ln x$.

1. La fonction g est dérivable sur] 0 ; +∞ [comme somme de fonctions qui le sont ; et $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

Cette dérivée s'annule pour $x = \pm \sqrt{2}/2$; elle est positive sur $] -\infty ; -\sqrt{2}/2] \cup [\sqrt{2}/2 ; +\infty [$ et négative

sur $[-\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2]$; la fonction g est donc décroissante sur $]0 ; \sqrt{2}/2]$ et croissante sur $[\sqrt{2}/2 ; +\infty [$; elle admet

donc un minimum en $x = \sqrt{2}/2$ qui vaut $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$.

2. Le minimum de g est strictement positif, donc $g(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty [$.

PARTIE B : 1. La fonction f est dérivable sur] 0 ; +∞ [comme somme et quotient de fonctions qui le sont ; et

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$. Donc le signe de f' est celui de g ; ainsi la fonction f est strictement

croissante sur $]0 ; +\infty [$.

2. On a $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; on a $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln x) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

3. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C .

4. La position de C par rapport à (d) sur $]0 ; +\infty [$ est déterminée par le signe de $f(x) - x = \frac{1 + \ln x}{x}$. Cette quantité

s'annule lorsque $1 + \ln x = 0$ soit $x = 1/e$. Ainsi, (d) est au-dessus de C lorsque $x < 1/e$ et (d) est au-dessous de C lorsque $x > 1/e$.

5. Une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1 est donnée par $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x + 1$.

6. On sait que, pour $x \geq \frac{1}{e}$, la courbe C est située au-dessus de (d) ; de plus, pour $x \geq \frac{1}{e}$, $f(x) - (x + 1) =$

$$\frac{1 + \ln x}{x} + x - x - 1 = \frac{1 + \ln x - x}{x} < 0 \text{ (par l'étude de } x \mapsto 1 + \ln x - x \text{ sur }]0 ; +\infty [) ; \text{ donc C est située au-dessous de T .}$$

PARTIE C : $a_1 = 1/e$ (vu à la question B.4) ; a_2 vérifie : $f'(a_2)(-a_2) + f(a_2) = 0$; soit

$$\frac{\ln(a_2) - a_2^2}{a_2^2} \times (-a_2^2) + \frac{1 + \ln a_2}{a_2} + a_2 = \frac{1 + 2 \ln a_2}{a_2} = 0 ; \text{ et on trouve } a_2 = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} ; a_3 = 1 \text{ (vu en B.5); on a}$$

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x^3} \text{ s'annule pour } a_4 = e^{1/2} = \sqrt{e} ; \text{ ces réels vérifient : } a_{n+1} = a_n \sqrt{e} \text{ pour } n = 1, 2, 3.$$