CORRIGE DEVOIR MAISON N° 6

Partie A:

1. Les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $[0; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

Et $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1} < 0$ sur $[0; +\infty[$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

$g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 + x = \dfrac{1-x+x^2-1+x}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1} > 0$ sur $[0; +\infty[$. Donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. On a $f(0) = 0$, donc pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, ainsi $\ln(x+1) \leqslant x$. On a $g(0) = 0$, donc pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, ainsi $\ln(x+1) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B: On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1} = u_n\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

1. Montrons par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = \dfrac{3}{2} \geqslant 1$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité: Supposons que, pour un $k \geqslant 1$, $u_k > 0$, et montrons que $u_{k+1} > 0$:

$u_{k+1} = u_k\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right) > 0$, puisque $u_k > 0$, et $\dfrac{1}{2^{k+1}} > 0$, donc $\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right) > 0$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\ln(u_n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$:

Initialisation : Pour $n = 1$, $\ln(u_1) = \ln\dfrac{3}{2} = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité: Supposons que, pour un $k \geqslant 1$, $\ln(u_k) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^k}\right)$, et montrons que

$\ln(u_{k+1}) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$:

$\ln(u_{k+1}) = \ln(u_k\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)) = \ln(u_k) + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right) + \ldots + \ln\left(1+\dfrac{1}{2^{k+1}}\right)$.

3. On pose $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{4^3} + \ldots + \dfrac{1}{4^n}$.

D'après la partie A, en prenant $x = \dfrac{1}{2^k}$, pour k entier supérieur ou égal à 1, $\dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\left(2^k\right)^2} \leqslant \ln(\dfrac{1}{2^k} + 1) \leqslant \dfrac{1}{2^k}$;

soit $\dfrac{1}{2^k} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4^k} \leqslant \ln(\dfrac{1}{2^k} + 1) \leqslant \dfrac{1}{2^k}$; en faisant la somme des termes dans la double inégalité, pour k variant de 1 à n, on trouve $S_n - \dfrac{1}{2}T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n$.

4. S_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $\dfrac{1}{2}$, donc

$S_n = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1-\dfrac{1}{2^n}$ et T_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $\dfrac{1}{4}$, donc $T_n = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1-(1/4)^n}{1-1/4} = \dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)$.

5. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4^n} = 0$, comme suites géométriques de raison strictement comprise entre – 1 et 1.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{3}$.

Partie C: 1. Sachant que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n > 0$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) > 1$ puisque $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$, et la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $S_n = 1-\frac{1}{2^n}$, donc $0 < S_n < 1$; comme $S_n - \frac{1}{2} T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n$, alors $\ln(u_n) \leqslant S_n < 1$, donc $\ln(u_n) < 1$, soit $u_n < e$. Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par e, donc elle converge vers un réel l.

3. Comme $S_n - \frac{1}{2} T_n \leqslant \ln(u_n) \leqslant S_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - \frac{1}{2} T_n) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - \frac{1}{2} T_n) = 1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, donc $\frac{5}{6} \leqslant \ln l \leqslant 1$; donc $e^{\frac{5}{6}} \leqslant l \leqslant e$, soit $2{,}3 < l < 2{,}72$.

Partie D: 1. En posant $x = \frac{1}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on déduit de la partie A que, $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln(1 + \frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$.

2. On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $w_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

a) $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - (\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+1}{n}) =$

$\frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n+1} - (\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}) = \frac{2n^2-2n(n+1)+n+1}{2n^2(n+1)} = \frac{1-n}{2n^2(n+1)} \leqslant 0$ pour n dans $\mathbb{N}^*$;

donc $v_{n+1} \leqslant v_n$, et (v_n) est décroissante.

b) $w_{n+1} - w_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - (\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+2}{n+1}) =$

$\frac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \geqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0$ pour n dans $\mathbb{N}^*$; donc $w_{n+1} \geqslant w_n$, et (w_n) est croissante.

c) Pour montrer que (v_n) et (w_n) sont adjacentes, il reste à montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = 0$.

Or $w_n - v_n = -\ln(n+1) + \ln(n) = -\ln(\frac{n+1}{n}) = -\ln(1 + \frac{1}{n})$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\ln 1 = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = 0$. Donc les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite γ.

3. Pour trouver une valeur approchée de leur limite commune à 10^{-2} près, on calcule, à l'aide d'un tableur les premières valeurs de (v_n) et (w_n), jusqu'à ce que $| v_n - w_n | \leqslant 10^{-2}$:

En fait, la convergence est très lente; voici deux tableaux obtenus avec un tableur, donnant les premières valeurs des suites, puis les valeurs donnant l'approximation souhaitée:

n	v_n	w_n
1	1	0,3069
2	0,806853	0,401388
3	0,734721	0,447039
4	0,697039	0,473895
5	0,673895	0,491574
6	0,658241	0,504090
7	0,646947	0,513416
8	0,638416	0,520633
9	0,631744	0,526383
10	0,626383	0,531073
11	0,621982	0,534971
12	0,618304	0,538261
13	0,615184	0,541076

n	v_n	w_n
166	0,580225	0,574219
167	0,580207	0,574237
168	0,580189	0,574254
169	0,580171	0,574272
170	0,580154	0,574289
171	0,580137	0,574306
172	0,580120	0,574323
173	0,580103	0,574339
174	0,580086	0,574356
175	0,580070	0,574372
176	0,580054	0,574388
177	0,580038	0,574404
178	0,580022	0,574420
179	0,580006	0,574435
180	0,579991	0,574451

Cette valeur est appelée constante d'Euler, dont une valeur approchée est 0,57721566...

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n}-\ln n) \simeq 0{,}57721566$.