CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLE N° 4

EXERCICE 1 : 1. Calcul de $f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \dfrac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$ pour tout x de l'intervalle $]-1; +\infty[$.

2. Pour tout x de l'intervalle $]-1; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.

a) La fonction N est dérivable sur $]-1\,; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $]-1\,; +\infty[$.

$N'(x) = 2(1+x) + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2(1+x)^2+1}{1+x} > 0$ sur $]-1\,; +\infty[$. Donc la fonction N est strictement croissante sur $]-1\,; +\infty[$.

b) $N(0) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$. Comme la fonction N est strictement croissante sur $]-1\,; +\infty[$, alors N est négative sur $]-1; 0]$ et positive sur $[0; +\infty[$. On sait que $f'(x) = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ qui est du signe de N sur $]-1\,; +\infty[$. Donc la fonction f est décroissante sur $]-1; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

3. a) La droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En posant $X = 1 + x$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ (résultat du cours). Donc la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.

b) L'abscisse du point d'intersection de la courbe C et de la droite D vérifie l'équation $f(x) = x$, soit $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$, soit $\ln(1 + x) = 0$, soit $1 + x = 1$, soit $x = 0$. Comme $f(0) = 0$, le point O(0; 0) est le point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

4. a) La fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Pour tout réel positif x, F est de la forme u^2 de dérivée $2uu'$, donc $F'(x) = 2\ln(1+x)\dfrac{1}{1+x} = 2\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.

Ainsi, une primitive de la fonction f est $G(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{2}[\ln(1+x)]^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx = G(3) - G(0) = \frac{3^2}{2} - \frac{1}{2}[\ln(1+3)]^2 - (0 - \frac{1}{2}[\ln(1+0)]^2) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}[2\ln 2]^2 = \frac{9}{2} - 2(\ln 2)^2$.

EXERCICE 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

$f'(x) = \ln(x+1) + x\dfrac{1}{1+x} = \ln(x+1) + \dfrac{x}{1+x}$. Pour $x \in [0; +\infty[$, $\ln(x+1) \geqslant 0$ et $\dfrac{x}{1+x} \geqslant 0$. Donc, pour $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$, et f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est tangent à la courbe C au point O si le nombre dérivé de f en 0 est égal à 0.

Or, $f'(0) = \ln(1) + 0 = 0$, donc l'axe des abscisses est bien tangent à la courbe C au point O.

2. a. Pour tout réel $x \neq -1$, $ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \dfrac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$. Les dénominateurs sont égaux, donc les numérateurs doivent être égaux, et par identification, on obtient $a = 1$, $a + b = 0$ et $b + c = 1$, soit $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$. Ainsi, pour tout réel $x \neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

b. D'où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 (x - 1 + \frac{1}{x+1})dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 - 0 = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

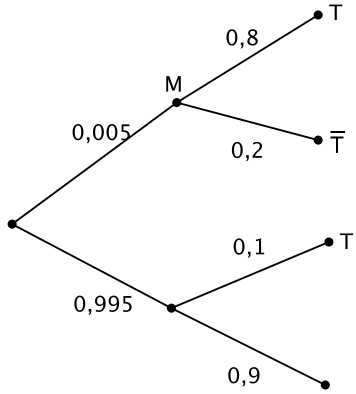
3. L'aire A du domaine plan délimité par la courbe C, les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses est égale à l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\ln(x+1)dx$. On pose $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = x$; alors $u'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

D'où J = $\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$ I = $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 3 : Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. La probabilité qu'il soit malade est égale à 0,005.
2. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».

a. L'arbre pondéré les données de l'énoncé :



b. Pour calculer la probabilité de l'évènement T on utilise la formule des probabilités totales : $p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \bar{M}) = p_M(T)p(M) + p_{\bar{M}}(T)p(\bar{M}) = 0,8\times0,005 + 0,1\times0,995 = 0,1035$.

c. La probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif est définie par $p_T(M) = \frac{p(M\cap T)}{p(T)} = \frac{0,8\times0,005}{0,1035} \simeq 0,0386$.

EXERCICE 4 : Un jeu consiste à miser un euro, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré. Si le joueur obtient un 6, il gagne 5 euros, et s'il obtient deux 6, il gagne 10 euros.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Le joueur peut gagner 0, 5 ou 10 euros. Comme il mise 1 euro, les valeurs prises par X sont – 1, 4 et 9.
2. $p(X = -1)$ = p(obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 aux deux lancers) = $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

$p(X = 4)$ = p(obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 à un lancer et 6 à l'autre) = $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{10}{36}$.

$p(X = 9)$ = p(obtenir 6 aux deux lancers) = $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. On vérifie que $p(X = -1) + p(X = 4) + p(X = 9) = 1$.

3. L'espérance mathématique de X est égale à $E(X) = -1\,\frac{25}{36} + 4\,\frac{10}{36} + 9\,\frac{1}{36} = \frac{-25+49}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.