

DEVOIR SURVEILLE N° 4

EXERCICE 1 (7 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
 - a) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $] - 1 ; +\infty[$.
 - b) Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f .
3. a) Montrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe C .
b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C et de la droite D .
4. Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = [\ln(1+x)]^2$.
 - a. Justifier la dérivabilité sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x , $F'(x)$.
 - b) Calculer $\int_0^3 f(x) dx$.

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x+1)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe C au point O ? Justifier.
2. On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$.
 - a. Déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$, $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.
 - b. Calculer I .
3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat de la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A du domaine plan délimité par la courbe C , les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe des abscisses.

EXERCICE 3 (4 points)

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».
 - a. Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
 - b. Calculer la probabilité de l'évènement T .
 - c. Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

EXERCICE 4 (3 points)

Un jeu consiste à miser un euro, puis à lancer deux fois un dé cubique équilibré. Si le joueur obtient un 6, il gagne 5 euros, et s'il obtient deux 6, il gagne 10 euros.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Montrer que les valeurs prises par X sont -1 , 4 et 9 .
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance mathématique de X .