DEVOIR SURVEILLE N° 6

EXERCICE 1 6 points

Une boîte contient 4 boules vertes et n boules blanches. Un jeu consiste à miser un euro puis à tirer simultanément deux boules de la boîte. Si les deux boules sont de la même couleur, le joueur gagne 5 euro; si elles sont de couleurs différentes, le joueur perd sa mise. Les tirages sont équiprobables.

1. Dans cette question, on suppose $n = 6$.

Calculer les probabilités d'obtenir: a) Deux boules de la même couleur. b) Deux boules de couleurs différentes.

2. Dans cette question l'entier n est quelconque supérieur ou égal à 2, et on note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.

a) Exprimer en fonction de n la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de X en fonction de n.

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $E(X) = 0$?

EXERCICE 2 Extrait de Amérique du Sud 2007 5 points

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f .

c) Dresser le tableau de variations de f .

d) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0 ; +\infty[$

e) Justifier que $0 < \alpha < 1$.

EXERCICE 3 Extrait de Polynésie septembre 2007 9 points

On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0 ;1]$ et vérifiant les conditions (P1), (P2) et (P3) suivantes :

- (P1) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ;1]$.
- (P2) : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
- (P3) : pour tout réel x de l'intervalle $[0 ;1]$, $f(x) \leqslant x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f = \int_0^1 [x - f(x)]dx$.

1. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geqslant 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $h(x) = 2^x - 1$. (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x = e^{x\ln 2}$).

a) Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P1) et (P2).

b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $g(x) = 2^x - x - 1$.

Montrer que, pour tout x de $[0 ; 1]$, $g(x) \leqslant 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction g sur $[0 ; 1]$).

c) En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

d) Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P = I_h$.

a) Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$.

Montrer que toute fonction P définie sur $[0 ; 1]$ par $P(x) = ax^2 + (1 - a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à(E).

b) Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P .

c) Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?