CORRECTION DE L'EVALUATION BRAIN-PREPA

EXERCICE 1

1. a) La fonction G est dérivable sur IR comme somme et composée de fonctions dérivables sur IR.

G'(x) =F'(x) - F'($-x$) = $\frac{1}{1+x^2}$ - $\frac{1}{1+(-x)^2}$ = 0 ; donc la fonction G est constante = G(0).

b) G(0) = F(0)+ F(0) = 0. Donc pour tout réel x , G(x) = 0, donc F(x) = -F($-x$) donc F est une fonction impaire.

2. a) H est dérivable sur I comme somme et composée de fonctions dérivables sur I .

H'(x) = F'(x) - $\frac{1}{x^2}$ F'($\frac{1}{x}$) = $\frac{1}{1+x^2}$ - $\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}$ = 0 pour tout réel x dans I. Donc la fonction H est constante sur I.

b) On a H(1) = F(1) + F(1), donc pour tout x dans I, H(x) = 2F(1).

c) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)=2F(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(\frac{1}{x})=F(0)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)=2F(1)$.

d) On en déduit que la droite d'équation y = 2F(1) est asymptote horizontale à la courbe (C) .

3. a) T'(x) = $\frac{1}{cos^2(x)}$ F'(tan(x)) - 1 = $\frac{1}{cos^2(x)}$ $\frac{1}{1+tan^2(x)}$ - 1 = 0 ; donc la fonction T est constante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; de plus, T(0) = F(tan(0)) - 0 = 0 ; donc pour tout réel x dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, T(x) = 0.

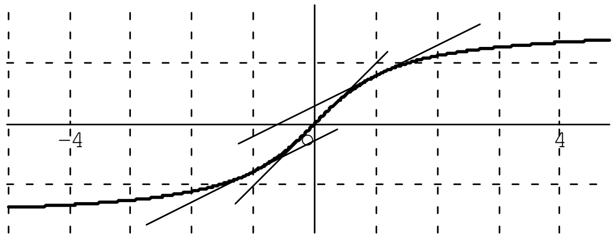
b) On a T($\frac{\pi}{4}$) = F(tan($\frac{\pi}{4}$)) - $\frac{\pi}{4}$ = F(1) - $\frac{\pi}{4}$; d'où F(1) = $\frac{\pi}{4}$.

4. Ci-contre le tableau de variations de F sur IR :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
F'(x)	+		
F(x)	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0	↗ $\frac{\pi}{2}$

5. Equations des tangentes aux points d'abscisses -1, 0, 1 :

$T_{-1} : y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$; $T_0 : y=x$; $T_1 : y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.



EXERCICE 2

A . 1. On a $g'(x)=6x^2+2x+\frac{1}{x}=\frac{6x^3+2x^2+1}{x}$ qui est strictement positif sur I ; donc la fonction g est strictement croissante sur I. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$.

2. La fonction g est continue (puisque dérivable) et est strictement croissante de I dans IR ; donc le nombre 0 a un unique antécédent dans I par g c'est-à-dire que l'équation $g(x)$ = 0 a une solution unique α ; avec la calculatrice, on trouve g(0,5) ≈ -0,1931 et g(0,6) ≈ 0,281 donc $0{,}5<\alpha<0{,}6$ et g(0,54) ≈ -0,0097 et g(0,55) ≈ 0,0374 donc $0{,}54<\alpha<0{,}55$.

B. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+ln(x)}{x}=-\infty$.

2. a) $f'(x)=2x+1-\frac{1-(1+ln(x))}{x^2}=\frac{2x^3+x^2-ln(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) Comme la fonction g est strictement croissante sur I et s'annule en α, on obtient le signe de $g(x)$ dans le tableau de variations de f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	‖ −	0	+
$f(x)$	‖$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3. a) $f(x)$ - $h(x)$ = - $\frac{1+ln(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+ln(x)}{x}=0$

b) Les positions relatives de C et Γ sont données par le signe de $f(x)$ - $h(x)$ = - $\frac{1+ln(x)}{x}$. On a 1 + ln(x) = 0 pour x = $\frac{1}{e}$, et donc :

si 0 < x < $\frac{1}{e}$, $f(x) > h(x)$ et C est au-dessus de Γ ;

si x > $\frac{1}{e}$, $f(x) < h(x)$ et C est au-dessous de Γ .