CORRECTION DEVOIR MAISON N° 9

PARTIE A : 1. Sur $]0\,;+\infty[$, les fonctions f_n sont dérivables comme quotient de fonctions qui le sont.

Leur dérivée sont : $f'_n(x) = \dfrac{\frac{n}{x}x^2 - (1+n\ln x)2x}{x^4} = \dfrac{n-2-2n\ln x}{x^3}$. Ces dérivées sont positives si $n-2-2n\ln x \geq 0$, soit $\ln x \leq \dfrac{n-2}{2n}$, soit $x \leq \exp(\dfrac{n-2}{2n})$. Ainsi, f_n est croissante si $x \in]0\,;\exp(\dfrac{n-2}{2n})\,]$ et décroissante si $x \in [\,\exp(\dfrac{n-2}{2n})\,;+\infty[$.

2. Limite en 0 : on a $\lim\limits_{x\to 0}(1+n\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -\infty$.

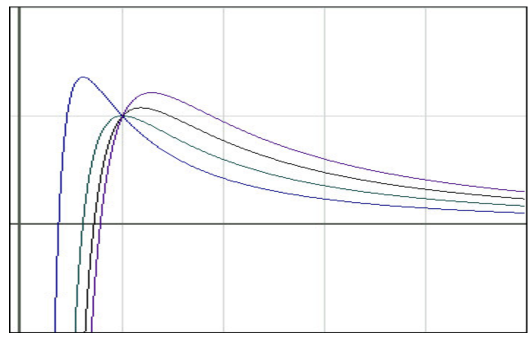
Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

3. Tableau de variations :

x	0		$e^{\frac{n-2}{2n}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		+	0	−	
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	$f_n(e^{\frac{n-2}{2n}})$	↘	0

Maximum de f_n : $f_n(e^{\frac{n-2}{2n}}) = \dfrac{1+n\frac{n-2}{2n}}{e^{\frac{n-2}{n}}} = \dfrac{n}{2e^{\frac{n-2}{n}}}$.

4. Tracé des courbes C_1 , C_2 , C_3 dans le même repère :



5. Pour $n > 1$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{1+(n+1)\ln x}{x^2} - \dfrac{1+n\ln x}{x^2} = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Cette différence ne dépend pas de n .

6. On a donc $f_4(x) - f_3(x) = f_3(x) - f_2(x)$, donc $f_4(x) = 2f_3(x) - f_2(x)$; il est possible de tracer C_4 à partir des courbes C_2 et C_3 en utilisant la relation précédente.

PARTIE B : 1. Posons, pour x dans $[1\,;e]$, $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $v(x) = \ln x$; on a $u(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$; ainsi

$$I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2}dx = \frac{-1}{e} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e} .$$

2. L'aire, en cm², du domaine plan limité par les courbes C_n et C_{n-1} et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ est égal à $25\int_1^e (f_{n+1}(x) - f_n(x))dx = 25\ I = 25 - \dfrac{50}{e}$ (car l'unité d'aire est de 5² cm²).

3. On a $A_2 = \int_1^e f_2(x)dx = \int_1^e (\dfrac{1}{x^2} + 2\dfrac{\ln x}{x^2})dx = \left[\dfrac{-1}{x}\right]_1^e + 2\ I = 1 - \dfrac{1}{e} + 2(1-\dfrac{2}{e}) = 3 - \dfrac{5}{e}$.

4. On a $A_n = \int_1^e f_n(x)dx = \int_1^e (\dfrac{1}{x^2} + n\dfrac{\ln x}{x^2})dx = \left[\dfrac{-1}{x}\right]_1^e + n\ I = 1 - \dfrac{1}{e} + n(1-\dfrac{2}{e})$. La suite (A_n) est une suite arithmétique de raison $I = 1 - \dfrac{2}{e}$ et de premier terme $1 - \dfrac{1}{e}$. La raison est l'aire du domaine plan limité par les courbes C_n et C_{n-1} et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ (cette aire est indépendante de n) .

PARTIE C : 1. Pour tout $n > 2$, $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{n}$; de plus, $\dfrac{n-2}{2n} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} > 0$, donc $\exp(\dfrac{n-2}{2n}) > e^0 = 1$ et $f_n(\exp(\dfrac{n-2}{2n})) > f_n(1) = 1$ (car f_n croissante sur $]0\,;\exp(\dfrac{n-2}{2n})\,]$) .

2. f_n est continue, croissante sur $]1\,;\exp(\dfrac{n-2}{2n})\,]$ et $f_n(1) = 1$, donc pour tout x de $]\,1\,;\ \exp(\dfrac{n-2}{2n})\ [$, $f_n(x) > 1$, et l'équation $f_n(x) = 1$ n'a pas de solutions dans l'intervalle $]\,1\,;\ \exp(\dfrac{n-2}{2n})\ [$.

3. $f_n(\sqrt{n}) = \dfrac{1+n\ln\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln n}{2}$. Pour $n > e^2$, on a $f_n(\sqrt{n}) > \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln e^2}{2} \geq 1$. On a $e^2 \approx 7{,}39$; donc, pour $n \geq 8$, on a $f_n(\sqrt{n}) \geq 1 = f_n(\alpha_n)$, donc $\alpha_n \geq \sqrt{n}$ (car f_n décroissante sur $[\,\exp(\dfrac{n-2}{2n})\ ;+\infty\,[$) ; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = +\infty$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$) .