

On désigne par  $n$  un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions notées  $f_n$ , qui sont définies pour  $x$  dans  $]0 ; +\infty[$  par  $f_n(x) = \frac{1+n \ln x}{x^2}$  et  $C_n$  la courbe représentative de  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  (unité graphique : 5 cm).

- PARTIE A :**
1. Etudier les variations des fonctions  $f_n$  en fonction de  $n$ .
  2. Déterminer les limites des fonctions  $f_n$  aux bornes de leur ensemble de définition.
  3. Dresser le tableau de variations de ces fonctions et préciser le maximum en fonction de  $n$ .
  4. Tracer les courbes  $C_1, C_2, C_3$  dans le même repère.
  5. Calculer  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ . Cette différence dépend-elle de  $n$  ?
  6. Expliquer comment il est possible de tracer  $C_4$  à partir des courbes  $C_2$  et  $C_3$ . Tracer  $C_4$ .

- PARTIE B :**
1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale  $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ .
  2. En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine plan limité par les courbes  $C_n$  et  $C_{n-1}$  et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$ .
  3. On note  $A_n$  l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes  $C_n$  et les droites d'équation  $y = 0, x = 1$  et  $x = e$ . Calculer  $A_2$ .
  4. Déterminer la nature de la suite  $(A_n)$  en précisant l'interprétation graphique de la raison.

**PARTIE C :** Dans cette partie, on prendra  $n$  entier supérieur ou égal à 3.

1. Vérifier que, pour tout  $n$ ,  $\exp(\frac{n-2}{2n}) > 1$  et  $f_n(\exp(\frac{n-2}{2n})) > 1$ .
2. Vérifier que l'équation  $f_n(x) = 1$  n'a pas de solutions dans l'intervalle  $]1 ; \exp(\frac{n-2}{2n})[$ .
3. On admet que l'équation  $f_n(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $[\exp(\frac{n-2}{2n}) ; +\infty[$ .

Calculer  $f_n(\sqrt{n})$  et montrer que, pour  $n > e^2$ , on a  $f_n(\sqrt{n}) \geq 1$ . En déduire que, pour  $n \geq 8$ , on a  $\alpha_n \geq \sqrt{n}$  et donner la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .