EXERCICE 1 (5 points): *NB : Les quatre propositions peuvent être examinées indépendamment les unes des autres.*
On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = 1 - (u_n)^2$.
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas :
a) Pour tout entier n, si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq v_n \leq 1$.
b) Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.
c) Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.
d) Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

EXERCICE 2 (5 points): On considère la courbe C représentative de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit a un réel strictement positif. Le point M est le point d'abscisse a sur la courbe C ;
le point N est le point d'intersection de la tangente à C en M et de l'axe des ordonnées ; le point P est le point de coordonnées $(0 ; \ln a)$.
a) Montrer que, pour tout $a > 0$, la distance NP est constante.
b) Le point R est le point d'intersection de la tangente à C en M et de l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de R.
c) Dans cette question, on suppose a dans l'intervalle]0 ; e]. Montrer que l'aire du triangle PNR est égale à $\dfrac{a - a\ln a}{2}$.
d) Déterminer l'aire maximale de ce triangle lorsque a décrit l'intervalle]0 ; e].

EXERCICE 3 (5 points): *Les questions suivantes sont indépendantes. Il est demandé de justifier toutes les réponses fournies.* Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données.
On donnera l'expression de $f(x)$.
1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$; l'équation $f(x) = 0$ admet les solutions 0 et 1 ;
et l'équation $f'(x) = 0$ admet la solution ½ .

2. f est définie sur $]0 ; +\infty[$, $f(4) = 2$ et, pour tout x et tout y réels strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

3. f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2 ; 2]$ est 0.

4. f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$; la limite de f en $+\infty$ est $-\infty$; la fonction dérivée s'annule en $x = e$; l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 5.

ATTENTION *: Les deux derniers exercices sont au choix (vous ne traiterez que l'un des deux)* :

EXERCICE 4 (5 points): Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. L'urne $\mathcal{U}$ contient 2 boules blanches et n boules rouges. L'urne $\mathcal{V}$ contient n boules blanches et 2 boules rouges. On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire deux boules de cette urne simultanément. On désigne par :
U l'événement : « On choisit l'urne $\mathcal{U}$ » ; V l'événement : « On choisit l'urne $\mathcal{V}$ » ;
B l'événement : « Les deux boules tirées sont blanches » ;
a) Montrer que la probabilité de l'événement U∩B est égale à $\dfrac{1}{(n+2)(n+1)}$.
b) Montrer que la probabilité de l'événement B est égale à $\dfrac{n^2 - n + 2}{2(n+2)(n+1)}$.
c) Déterminer le plus petit entier n tel que $p_B(U) \leq \dfrac{1}{7}$.

EXERCICE 5 (5 points): On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$ et la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \int_0^n f(x)dx$.
a) Montrer que pour tout réel x positif ou nul, on a $e^x - x \geq \dfrac{e^x}{2}$.
b) En déduire que $u_n \leq \int_0^n 2xe^{-x}dx$. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\int_0^n 2xe^{-x}dx$ en fonction de n.
c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2$. La suite (u_n) est-elle convergente ?