

DEVOIR SURVEILLE N° 4

EXERCICE 1 (4 points)

Dans une région ostréicole, on s'intéresse à la production d'huîtres. Une partie de la production est conditionnée par calibre, en bourriche étiquetées : P (petite), M (moyenne) et G (grande). La probabilité d'erreur lors d'un tri est estimée en fonction de la catégorie et donnée dans le tableau ci-contre :

Catégorie	P	M	G
Probabilité d'erreur	0,035	0,06	0,045

Par ailleurs, la proportion d'huîtres de chaque catégorie est :
pour les petites 13 % ; pour les moyennes 54 % ; pour les grandes 33 %.

- Dessiner l'arbre de probabilités correspondants.
- On appelle E l'événement : « une huître a été mal triée ». Calculer la probabilité de E.
- Quelle est la probabilité qu'une huître soit moyenne sachant qu'elle a été mal triée ?

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + x) - x$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

- Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- Montrer que $f(x)$ peut s'écrire $\ln(1 + \frac{x}{e^x})$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
- Préciser les équations des éventuelles asymptotes à C.
- Soit m un nombre réel.
Discuter suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

EXERCICE 3 (10 points)

Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

- Étudier la parité de la fonction f . Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
- Étudier les variations de la fonction f sur $] -1; 1[$.
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 2$, par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - Montrer que u_n peut s'écrire $\ln(n-1) - \ln(n+1)$.
 - Étudier les variations de la suite (u_n) .
 - Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- On considère la fonction F définie sur $] -1; 1[$ par $F(x) = (x-1)\ln(1-x) - (x+1)\ln(x+1)$.
 - Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f .

- Déterminer alors la valeur exacte de $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx$.

- Montrer que $I = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{84375}{823543}\right)$.