CORRIGÉ DEVOIR MAISON n° 7

EXERCICE 1

1. On peut écrire les fonctions f et g : $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x} = \ln(1+x) - \ln x - \dfrac{1}{1+x}$ et

$g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x} = \ln(1+x) - \ln x - \dfrac{1}{x}$.

a) Les fonctions f et g sont dérivables sur $]0; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. Et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x(1+x)-(1+x)^2+x}{x(1+x)^2} = \dfrac{-1}{x(1+x)^2} < 0$ sur $]0; +\infty[$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-(1+x)x+1+x}{(1+x)x^2} = \dfrac{1}{(1+x)x^2} > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$ puisque $\ln 1 = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; comme la fonction f est strictement décroissante, alors pour tout réel $x > 0$, $f(x) > 0$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$; comme la fonction g est strictement croissante, alors pour tout réel $x > 0$, $g(x) < 0$.

c) Pour tout réel x strictement positif, $f(x) > 0$, soit $\ln(1+x) - \ln x - \dfrac{1}{1+x} > 0$, soit $\ln(1+x) - \ln x > \dfrac{1}{1+x}$.

$g(x) < 0$, soit $\ln(1+x) - \ln x - \dfrac{1}{x} < 0$, soit $\ln(1+x) - \ln x < \dfrac{1}{x}$. D'où $\dfrac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n}$.

a) Pour tout entier $n > 0$, $\dfrac{1}{1+n} \leqslant \ln(1+n) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{2+n} \leqslant \ln(2+n) - \ln(1+n) \leqslant \dfrac{1}{1+n}$;

$\dfrac{1}{3+n} \leqslant \ln(3+n) - \ln(2+n) \leqslant \dfrac{1}{2+n}$; etc... ; $\dfrac{1}{2n} \leqslant \ln(2n) - \ln(2n-1) \leqslant \dfrac{1}{2n-1}$;

$\dfrac{1}{2n+1} \leqslant \ln(2n+1) - \ln(2n) \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

En additionnant membre à membre toutes ces inégalités sauf la dernière, on obtient $u_n \leqslant \ln(2n) - \ln n = \ln 2$.

En additionnant membre à membre toutes ces inégalités sauf la première, on obtient $\ln(2n+1) - \ln(1+n) \leqslant u_n$.

D'où $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln 2$.

b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = \ln 2$; par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

EXERCICE 2

On considère deux réels a et b strictement positifs tel que $a + b = 1$.

Le but de l'exercice est de démontrer que $a\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) + b\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) \leqslant \ln 2$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 0$.

a) On sait que $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} (1-x)\ln(1-x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$. Donc la fonction f est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to1} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to1} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{X\to0} X\ln X = 0$ (en posant $x = 1-x$), donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 0 = f(1)$. Donc la fonction f est continue en 1.

b) Pour montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C, il faut et il suffit de démontrer que pour tout x de $[0; \frac{1}{2}]$, $f(\frac{1}{2} - x) = f(\frac{1}{2} + x)$:

$f(\frac{1}{2} - x) = -(\frac{1}{2} - x)\ln(\frac{1}{2} - x) - (1 - (\frac{1}{2} - x))\ln(1 - (\frac{1}{2} - x)) = (x - \frac{1}{2})\ln(\frac{1}{2} - x) - (\frac{1}{2} + x)\ln(\frac{1}{2} + x)$.

$f(\frac{1}{2} + x) = -(\frac{1}{2} + x)\ln(\frac{1}{2} + x) - (1 - (\frac{1}{2} + x))\ln(1 - (\frac{1}{2} + x)) = -(\frac{1}{2} + x)\ln(\frac{1}{2} + x) + (x - \frac{1}{2})\ln(\frac{1}{2} - x)$.

Donc $f(\frac{1}{2} - x) = f(\frac{1}{2} + x)$ et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C.

c) La fonction f est dérivable sur $]0; 1[$ comme produit et somme de fonctions qui le sont ;

$f'(x) = -\ln(x) - x\frac{1}{x} - (-1)\ln(1 - x) - (1 - x)\frac{-1}{1-x} = \ln(1 - x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$.

$f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \geqslant 0$ si et seulement si $\frac{1-x}{x} \geqslant 1$ si et seulement si $\frac{1}{x} \geqslant 2$ si et seulement si $x \leqslant \frac{1}{2}$. Donc la fonction f est croissante sur $]0; \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}; 1[$.

d) Le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	$\nearrow$	ln2	$\searrow$	0

La valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(\frac{1}{2}) = \ln 2$.

2. En déduire l'inégalité proposée au début de l'exercice.

La fonction f admet un maximum égal à ln2 atteint en $\frac{1}{2}$; donc pour tout x de $[0; 1]$, $-x\ln(x) - (1 - x)\ln(1 - x) \leqslant \ln 2$. EN prenant $a = x$ et $b = 1 - a = 1 - x$, on obtient, pour tous réels a et b de $[0; 1]$ tels que $a + b = 1$, on obtient $-a\ln(a) - (b)\ln(b) \leqslant \ln 2$, soit $a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant \ln 2$.

3. On obtient l'égalité $a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 2$ lorsque la fonction f atteint son maximum, soit $x = a = \frac{1}{2}$ et dans ce cas, $b = \frac{1}{2}$.