

EXERCICE 1 :

a) $P_M(T) = 0,96$ signifie que la probabilité qu'un individu malade obtienne un test positif est de 0,96. $P_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,94$ signifie que la probabilité qu'un individu en bonne santé obtienne un test négatif est de 0,94. $P(M) = 0,01$ signifie que la probabilité qu'un individu de la population soit malade est de 0,01.

b) L'arbre ci-contre :

c) La probabilité pour qu'un individu dont le test est positif, soit atteint de la

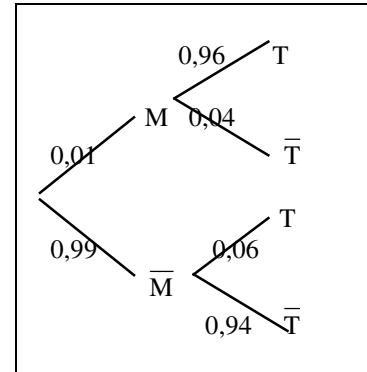
$$\text{maladie est } P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)}.$$

$$\text{Calculons } P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) = 0,01 \times 0,96 + 0,99 \times 0,06 = 0,069;$$

$$\text{d'où } P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P_M(T) \times P(M)}{P(T)} = \frac{0,96 \times 0,01}{0,069} = 0,13913.$$

d) La probabilité pour qu'un individu dont le test est positif, soit en bonne santé est

$$P_T(\bar{M}) = 1 - P_T(M) = 0,86087.$$



EXERCICE 2 : Notons A l'événement : « Le boulon est fabriqué par la machine A », B l'événement : « Le boulon est fabriqué par la machine B », C l'événement : « Le boulon est fabriqué par la machine C », et D l'événement : « Le boulon est défectueux ». La probabilité que le boulon défectueux ait été fabriqué par la machine C est

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)}. \text{ La probabilité que le boulon soit défectueux est}$$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = 0,60 \times 0,02 + 0,30 \times 0,03 + 0,10 \times 0,04 = 0,025.$$

$$\text{Donc } P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{0,1 \times 0,04}{0,025} = 0,16.$$

EXERCICE 3 : a) La fonction u est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

$$u'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{x^2}{1+x}. \text{ Cette dérivée est strictement positive sur }]0; +\infty[, \text{ donc } u \text{ est strictement croissante sur}$$

$]0; +\infty[$; de plus $u(0) = 0$, donc $u(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

b) La fonction v est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont.

$$v'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x+x^2) = \frac{-x^3}{1+x}. \text{ Cette dérivée est strictement négative sur }]0; +\infty[, \text{ donc } v \text{ est strictement}$$

décroissante sur $]0; +\infty[$; de plus $v(0) = 0$, donc $v(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on a $u(x) > 0$, soit $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x)$ et $v(x) < 0$, soit $\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$. Donc on a bien

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

d) En prenant $x = 0,1$, on a $0,1 - \frac{0,1^2}{2} < \ln(1+0,1) < 0,1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^3}{3}$, soit $\frac{19}{200} < \ln(1,1) < \frac{143}{1500}$. Comme

$$\frac{143}{1500} - \frac{19}{200} = \frac{1}{3000} < 0,001 \text{ on a bien un encadrement au millième du nombre } \ln(1,1) \text{ par deux rationnels.}$$

e) Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $] -1; 0[$; sur cet intervalle, on a $u(x) < 0$, et $v(x) > 0$; donc la double inégalité n'est pas vraie sur $] -1; 0[$.

$$\text{On a seulement les inégalités : } \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} < x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{On peut aussi démontrer que l'on a pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$$