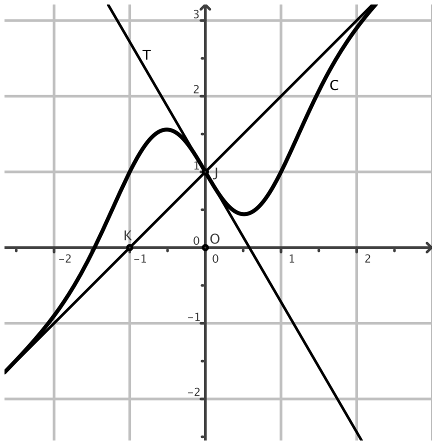
DEVOIR MAISON N° 8

EXERCICE 1



Une fonction f et sa courbe représentative C dans un repère orthogonal
(O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) représentée ci-contre possèdent les propriétés suivantes:

- la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$;
- le point J(0; 1) est centre de symétrie de C;
- la droite (JK) est asymptote à C en $+\infty$ et en $-\infty$;
- la droite T d'équation $y = (1 - e)x + 1$ est la tangente à C en J.

Le but du problème est de déterminer une expression de f(x) et de trouver d'autres propriétés de f.

1. Expression de $f(x)$:

a) Montrer qu'il existe une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant 0 comme limite en $+\infty$ et en $-\infty$, telle que : $f(x) = x + 1 + g(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire que la fonction g est impaire, puis que la dérivée de f est paire.

d) On admet que $g(x)$ est de la forme $g(x) = (ax + b)\ e^{-x^2}$. Calculer les constantes a et b.

2. Sens de variations de f :

a) Vérifier que $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)\ e^{-x^2+1}$.

b) Étudier le sens de variations de f' sur $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; +\infty[$, puis que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

d) Étudier alors les variations de f sur $[0; +\infty[$.

e) Exprimer le minimum $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de polynômes en α .

3. Propriétés géométriques de C:

Étudier la position de C par rapport à la droite (JK) sur $[0; +\infty[$.

Étudier la position de C par rapport à T sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE 2

On considère le triangle direct ABC et les triangles ABD, BCE CAF équilatéraux à l'extérieur de ABC.
Les points P, Q, et R sont les centres de gravité des triangles respectifs ABD, BCE, CAF.
Montrer que PQR est équilatéral.