

**EXERCICE 1 : Partie A :** Il s'agit d'un schéma de Bernoulli avec  $2n$  lancers et une probabilité de succès pour

chaque lancer de  $\frac{1}{2}$ . La probabilité d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce est  $= \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-4} = \frac{70}{2^8} = \frac{35}{128}$  et la

probabilité d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce est  $= \binom{12}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-6} = \frac{924}{2^{12}} = \frac{231}{1024} < \frac{280}{1024} = \frac{35}{128}$ ; donc on a plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce.

On a  $P(n) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$ ; de plus  $P(n+1) = \binom{2(n+1)}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+1)-(n+1)} = \binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{2^{2n+2}}$ .

D'où, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \frac{1}{2^{2n+2}}}{\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{1}{4} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$ .

La loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  est une loi binomiale de paramètres  $2n$  et  $\frac{1}{2}$ ; d'où

$p(X = k) = \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$ . L'espérance mathématique de  $X$  est égale au produit des paramètres  $= n$ .

**Partie B :**  $P(A) = P(\text{« obtenir deux boules rouges » ou « obtenir deux boules jaunes »}) = P(\text{« obtenir deux boules$

rouges »}) + P(\text{« obtenir deux boules jaunes »}) =  $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$ .  $P(B) = 1 - P(A) = \frac{7}{15}$ .

La variable aléatoire  $X$  prend les valeurs 0, 1 et 2. On a  $P(X = 0) = P(\text{« obtenir deux boules jaunes »}) = \frac{1}{15}$ ;

$P(X = 2) = P(\text{« obtenir deux boules rouges »}) = \frac{7}{15}$ ; et  $P(X = 1) = P(\text{« obtenir une boule jaune et une boule rouge »}) =$

$\frac{7}{15}$ . Son espérance mathématique est  $E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{7}{15} = \frac{7}{5}$ .

**EXERCICE 2 : Partie A :** a) On a  $f'(x) = (2x+a)e^{x^2+ax+b}$  et  $f'(1,5) = 0$  d'où  $a = -3$ . De plus,

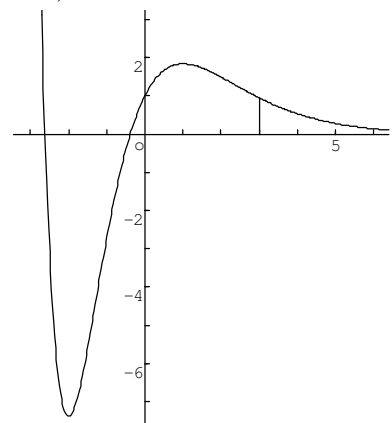
$f(1,5) = e^{1,5^2+1,5a+b} = e^{-1,25}$ , d'où  $1,5^2 + 1,5a + b = -1,25$  et  $b = 1$ .

b) La droite d'équation  $x = 1,5$  est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction  $f$  si pour tout  $x$  de  $\mathbf{R}$ , on a  $f(1,5+x) = f(1,5-x)$ . On a  $x^2 - 3x + 1 = (x-1,5)^2 - 1,25$ , d'où  $f(1,5+x) = e^{x^2-3x+1} = f(1,5-x)$ .

**Partie B :** a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$  pour  $\alpha$  réel positif. b)  $g'(x) = (-x^2 - x + 2)e^{-x}$ ; le signe de cette dérivée est celui de  $(-x^2 - x + 2)$ . D'où le tableau de variations

|         |           |        |       |           |
|---------|-----------|--------|-------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$   | $1$   | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$    | $+$   | $0$       |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $-e^2$ | $5/e$ | $0$       |

d) Comme la fonction  $g$  est strictement positive sur  $\mathbf{R}_+$ ,  $u_n$  est l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe  $C_g$  et les droites



d'équation  $x = 0$  et  $x = n$ .  $u_3$  est grisée sur le dessin.

e)  $u_0 = \int_0^0 g(x) dx = 0$ . On a  $u_{n+1} = u_n + \int_n^{n+1} g(x) dx > u_n$ , donc la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

f)  $G'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$  donc  $G$  est une primitive de  $g$ . D'où

$u_n = G(n) - G(0) = (-n^2 - 5n - 6)e^{-n} + 6$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$ . L'aire de la partie du

plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe  $C_g$  et l'axe des ordonnées vaut 6 unités d'aires.

**Partie C :** a)  $h'(x) = 2x^2 + c^2$  d'où  $h'(\ln 5) = 2(\ln 5)^2 + c^2 = 2 \times 1,5^2 + 1,5^2 = 0$  d'où  $c = -3$ ;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = d = 2$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

b) Pour résoudre l'équation  $h(x) = 0$ , on pose  $X = e^x$ ; l'équation devient  $X^2 - 3X + 2 = 0$  qui a deux solutions :  $X_1 = 1$  et  $X_2 = 2$ ; d'où les solutions  $x_1 = 0$  et  $x_2 = \ln 2$ .