

**EXERCICE 1 ( 8 points )**

**Partie A :** On lance  $2n$  fois une pièce de monnaie équilibrée, où  $n$  est un entier naturel non nul.

A-t-on plus de chance d'obtenir 4 piles en lançant 8 fois la pièce que d'obtenir 6 piles en lançant 12 fois la pièce ?

On note  $P(n)$  la probabilité d'obtenir  $n$  piles en lançant  $2n$  fois la pièce. Exprimer  $P(n)$  en fonction de  $n$ .

Montrer que, pour  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}$ .

On désigne par  $X$  le nombre de piles en lançant  $2n$  fois la pièce. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  et préciser son espérance mathématique.

**Partie B :** Une urne contient 10 boules : 7 boules rouges toutes numérotées 1, et 3 boules jaunes toutes numérotées 0.

On tire simultanément 2 boules de cette urne. On considère les événements  $A$  : « les deux boules sont de la même couleur » et  $B$  : « les deux boules sont de couleurs différentes ». Déterminer les probabilités  $P(A)$  et  $P(B)$ .

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale à la somme des chiffres des deux boules. Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et préciser son espérance mathématique.

**EXERCICE 2 ( 12 points )**

**Partie A :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{x^2+ax+b}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.

a) Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour lesquelles le tableau de variations ci-contre est celui de la fonction  $f$ . Justifier la réponse.

b) Montrer que la droite d'équation  $x = \frac{3}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction  $f$ .

|         |           |             |           |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1,5         | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $e^{-1,25}$ | $+\infty$ |

**Partie B :** On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$ .

a) Déterminer les limites de la fonction  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.

b) Etudier les variations de la fonction  $g$ . Dresser son tableau de variations.

c) Tracer la courbe  $C_g$  représentative de  $g$  dans un repère orthonormé.

d) On considère la suite  $(u_n)$  définie par : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \int_0^n g(x) dx$ . Interpréter graphiquement  $u_n$  et dessiner  $u_3$  sur le graphique de la question précédente.

e) Calculer le premier terme  $u_0$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

f) Montrer que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = (-x^2 - 5x - 6)e^{-x}$  est une primitive de  $g$ . Déterminer alors  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Quelle est l'interprétation graphique de ce dernier résultat ?

**Partie C :** On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^{2x} + ce^x + d$  où  $c$  et  $d$  sont des réels.

a) Déterminer les valeurs de  $c$  et  $d$  pour que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$  et  $h'(\ln(1,5)) = 0$ . Justifier la réponse.

b) Résoudre l'équation  $h(x) = 0$ .