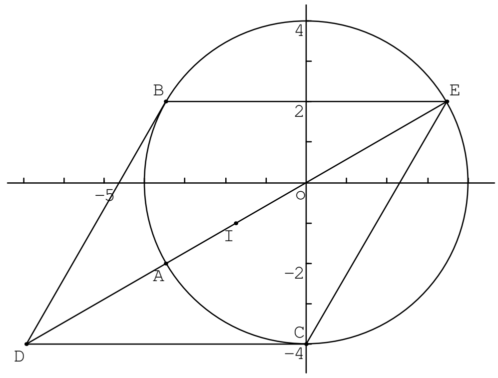
CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 5 BRAIN-PREPA

EXERCICE 1

a) OA = $|a|$ = 4 , OB = $|b|$ = 4 et AB = $|b - a|$ = 4. Donc le triangle OAB est équilatéral.

b) On a $c = e^{i\frac{\pi}{3}}a = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{-5\pi}{6}} = 4e^{-i\frac{\pi}{2}} = -4i$.

c) On a $d = 2a = -4\sqrt{3} - 4i$. d) ci-contre :



e) Le triangle BCD est équilatéral ;
en effet : DC = BD = BC = $4\sqrt{3}$.

f) Le point I a pour affixe $\frac{b+c}{2} = -\sqrt{3} - i$; le point E est l'image de D par l'homothétie de centre I et de rapport -1, d'où son affixe e vérifie $e + \sqrt{3} + i = -1(d + \sqrt{3} + i)$, d'où $e = 2\sqrt{3} + 2i$. L'image de C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a une affixe e' vérifiant

$e' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$ d'où

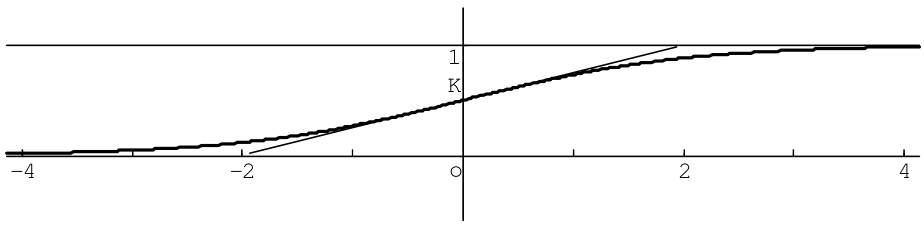
$e' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2\sqrt{3} - 6i) + 2\sqrt{3} + 2i = 2\sqrt{3} + 2i = e$. Donc E est bien l'image de C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 2

a) On peut écrire $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$; d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$; et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$; on a donc deux asymptotes horizontales à C_f : l'une en $+\infty$ d'équation $y = 1$ et l'autre en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

b) Pour tout x de IR, on a $f(x) + f(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 = 2\times\frac{1}{2}$ donc le point K(0 ; $\frac{1}{2}$) est bien un centre de symétrie de C_f .

c) La fonction f est dérivable sur IR comme composée de fonctions dérivables . Déterminons la dérivée de f :
$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ sur IR. Donc la fonction f est strictement croissante sur IR.



d) Une équation de la tangente à C_f au point K est
$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

e) Pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C_f , il suffit d'étudier sur IR le signe de
$f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^x}{1+e^x} - \left(\frac{x+2}{4}\right) = \frac{2e^x - xe^x - 2 - x}{4(1+e^x)}$; le dénominateur étant strictement positif, il suffit d'étudier sur IR le signe de $g(x)$ où $g(x) = 2e^x - xe^x - 2 - x$.

f) On a $g'(x) = e^x - xe^x - 1$ et $g''(x) = -xe^x$. Donc le signe de $g''(x)$ est le signe de $(-x)$ qui donne les variations de g' qui atteint donc un maximum en 0 égale à $g'(0) = 0$; donc $g'(x)$ est négative ou nulle et donc la fonction g est décroissante sur IR ; de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(2 - x - 2e^{-x} - xe^{-x}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Donc la fonction g est continue et strictement monotone de IR dans IR ; elle s'annule donc une seule fois ; or $g(0) = 0$. Ainsi, pour x négatif, $g(x)$ est positif et C_f est au-dessus de T ; pour x positif, $g(x)$ est négatif et C_f est au-dessous de T.

g) On a vu que f est continue et strictement monotone de IR dans]0 ; 1[; donc pour tout réel a strictement compris entre 0 et 1, il existe un unique réel x tel que $f(x) = a$. On a $\frac{e^x}{1+e^x} = a$, d'où $e^x = (1+e^x)a$ soit $e^x(1-a) = a$ soit $e^x = \frac{a}{1-a}$ soit $x = ln\left(\frac{a}{1-a}\right) = ln(a) - ln(1-a)$. Si $a = \frac{1}{3}$, on obtient $x == ln(\frac{1}{3}) - ln(\frac{2}{3}) = -ln(2)$.