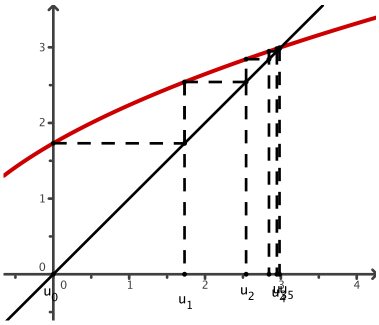
CORRIGE DEVOIR MAISON N° 3

EXERCICE 1 :



On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$ et $u_0 = 0$.

1. La représentation graphique des six premiers termes de la suite :

Conjectures sur la suite (u_n) : elle est croissante, elle est bornée par 0 et 3, et elle converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.

Première méthode :

2. a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$:

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: supposons que pour un entier k, $0 \leqslant u_k \leqslant 3$; montrons que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$:

$0 \leqslant u_k \leqslant 3$, entraîne $0 \leqslant 2u_k \leqslant 6$, entraîne $3 \leqslant 2u_k + 3 \leqslant 9$, entraîne $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{2u_k+3} \leqslant 3$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, donc $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 3$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$:

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2\times 0+3} = \sqrt{3}$ donc $u_0 < u_1$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: supposons que pour un entier k, $u_k < u_{k+1}$; montrons que $u_{k+1} < u_{n+2}$:

$u_k < u_{k+1}$ entraîne $2u_k < 2u_{k+1}$, entraîne $2u_k + 3 < 2u_{k+1} + 3$ entraîne $\sqrt{2u_k+3} < \sqrt{2u_{k+1}+3}$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, donc $u_{k+1} < u_{k+2}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$ et la suite (u_n) est strictement croissante.

c) La suite (u_n) est majorée par 3 et strictement croissante donc elle converge vers un réel l compris entre 0 et 3. Sa limite est solution de l'équation $g(x) = x$, soit $\sqrt{2x+3} = x$, on élève au carré : $2x + 3 = x^2$ équivaut à $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16 > 0$, il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$. La limite de la suite doit être comprise entre 0 et 3, donc la limite est 3.

Deuxième méthode :

3. a) On sait que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$, donc $0 \leqslant 3 - u_{n+1}$; montrons que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}(3 - u_n)$: comme $u_n \geqslant 1$, ceci revient à montrer que pour tout x de $[1; 3]$, $3 - g(x) \leqslant \dfrac{2}{3}(3 - x)$,

soit $1 + \dfrac{2}{3}x - g(x) \leqslant 0$. On pose $h(x) = 1 + \dfrac{2}{3}x - g(x)$. On cherche le signe de cette fonction sur $[1; 3]$: h est dérivable comme somme de fonctions qui le sont, et $h'(x) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \dfrac{2\sqrt{2x+3}-3}{3\sqrt{2x+3}}$. Le dénominateur est positif; pour $1 \leqslant x \leqslant 3$, $5 \leqslant 2x + 3 \leqslant 9$, soit $2\sqrt{5} \leqslant 2\sqrt{2x+3} \leqslant 6$, soit $2\sqrt{5} - 3 \leqslant 2\sqrt{2x+3} \leqslant 3$. Or, $2\sqrt{5} - 3$ est positif, donc cette dérivée est positive; donc h est croissante sur $[1; 3]$. Comme $h(3) = 3 - 3 = 0$, alors la fonction h est négative sur $[1; 3]$, et donc $1 + \dfrac{2}{3}x - g(x) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$, et donc $3 - g(u_n) \leqslant \dfrac{2}{3}(3 - u_n)$,

soit $3 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}(3 - u_n)$.

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n (3 - u_0)$:

Initialisation : Par la question précédente, $0 \leqslant 3 - u_1 \leqslant \dfrac{2}{3}(3 - u_0)$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité: supposons que pour un entier k, $0 \leqslant 3 - u_k \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^k (3 - u_0)$; montrons que $0 \leqslant 3 - u_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1} (3 - u_0)$:

$0 \leqslant 3 - u_{k+1} \leqslant \dfrac{2}{3}(3 - u_k) \leqslant \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k (3 - u_0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k+1} (3 - u_0)$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n (3 - u_0)$.

c) La suite $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ strictement comprise entre 0 et 1, donc elle converge vers 0. Donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (3-u_0) = 0$, et par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} (3-u_n) = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

EXERCICE 2 :

1. a) D'après la propriété (1), $f'(x)^2 = f(x)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, donc pour tout nombre réel x, $f'(x) \neq 0$.

b) D'après la propriété (1), $f(0)^2 = f'(0)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, donc $f(0) = 0$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), avec $(u^2)' = 2uu'$, on trouve $2f''(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0$; on factorise par $2f'(x)$: $2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0$ et comme $f'(x) \neq 0$, on obtient que pour tout nombre réel x, $f''(x) = f(x)$.

3. a) On a $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 0$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 0$.

b) On a $u'(x) = f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) = u(x)$ et $v'(x) = f''(x) - f'(x) = f(x) - f'(x) = -v(x)$.

c) La fonction u est solution de l'équation différentielle $y' = y$ et $y(0) = 1$, donc $u(x) = e^x$; la fonction v est solution de l'équation différentielle $y' = ky$ et $y(0) = 1$ avec $k = -1$, donc $v(x) = e^{-x}$.

d) Comme $u = f' + f$ et $v = f' - f$, il vient $f = \frac{u-v}{2}$, soit, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a) Limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. de cette dernière, en posant $X = -x$, il vient $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De même, en posant $X = -x$, il vient $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par la proposition (3), en écrivant $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, car $(e^{-x})' = -e^{-x}$. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x) > 0$, et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

5. a) La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; donc pour tout réel m, il existe un unique α dans $\mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = m$, c'est-à-dire tel que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b) Lorsque $m = 3$, l'équation s'écrit $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 3$,

soit $e^x - e^{-x} = 6$, soit $e^x - \frac{1}{e^x} = 6$, soit $\frac{e^{2x}-1}{e^x} = 6$,

soit $e^{2x} - 1 = 6e^x$, soit $e^{2x} - 6e^x - 1 = 0$. On pose $X = e^x$, on obtient l'équation $X^2 - 6X - 1 = 0$.

Le discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4(-1) = 40 > 0$, il y a deux solutions :

$X_1 = \frac{6-\sqrt{40}}{2} = \frac{2(3-\sqrt{10})}{2} = 3 - \sqrt{10}$ et $X_2 = \frac{6+\sqrt{40}}{2} = 3 + \sqrt{10}$.

On obtient alors $e^{x_1} = 3 - \sqrt{10} < 0$ donc impossible et s $e^{x_2} = 3 + \sqrt{10}$, qui donne $x_2 = \ln(3 + \sqrt{10}) \simeq 1{,}82$.