

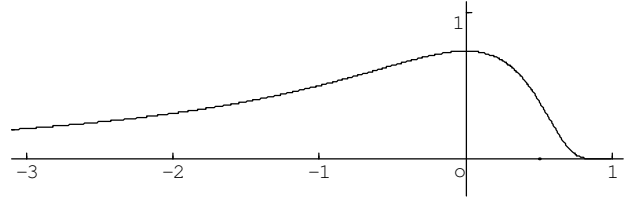
EXERCICE 1 : 1. a) On a $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + X$, d'où $\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{(x-1)^2} e^{1+X} = \frac{e}{2} X^2 e^X$. On a $\lim_{x \rightarrow 1} X = -\infty$ et en utilisant les croissances comparées : $\lim_{X \rightarrow -\infty} X^2 e^X = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. c) La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote horizontale à C.

d) La fonction f est dérivable sur $] -\infty ; 1 [$ comme produit de

deux fonctions qui le sont. $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$; le signe de

cette dérivée dépend de $-4x$, donc la fonction f est croissante sur $] -\infty ; 0 [$ puis décroissante sur $] 0 ; 1 [$. Elle atteint un maximum égal à $2/e$ en $x = 0$. e) Représentation de C :



2. a) En dérivant la fonction f , on a vu que

$$\left(e^{\frac{x+1}{x-1}} \right)' = \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}, \text{ donc une primitive de } f \text{ sur }] -\infty ; 1 [\text{ est } F(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

b) On a $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = \left[-e^{\frac{x+1}{x-1}} \right]_0^\alpha = \frac{1}{e} - e^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}$. $g(1/2)$ représente l'aire (en unité d'aire) de la surface limitée par la courbe C,

l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = e^{-1}$.

3. a) On a $2/e \approx 0,73$; donc $1/2 \in]0; 2/e [$. Sur $] -\infty ; 0 [$, la fonction f est continue et strictement croissante et ses valeurs sont dans $]0; 2/e [$; donc l'équation $f(x) = 1/2$ a une unique solution dans $] -\infty ; 0 [$; or $f(-1) = 1/2$, donc -1 est cette solution. Sur $] 0 ; 1 [$, la fonction f est continue et strictement décroissante et ses valeurs sont dans $]0; 2/e [$; donc l'équation $f(x) = 1/2$ a une unique solution β dans $] 0 ; 1 [$; b) Par approximation, on obtient $0,43 < \beta < 0,44$.

EXERCICE 2 : Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $]0; +\infty [$ par $f(x) = \frac{2x+a}{3} - x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}$.

1. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty [$ comme somme de fonctions qui le sont. Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \right). f'(x) > 0 \text{ pour } 1 - \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}} > 0 \text{ soit } 1 > \left(\frac{a}{x} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ soit } \frac{a}{x} < 1, \text{ soit } a < x. \text{ Donc la fonction } f$$

est décroissante sur $]0; a [$ et croissante sur $] a; +\infty [$. Elle atteint donc un minimum pour $x = a$ et ce minimum est $f(a) = 0$; donc la fonction f est positive sur $]0; +\infty [$. L'équation $f(x) = 0$ a pour solution $x = a$, puisque le minimum de la fonction est 0 atteint pour $x = a$.

2. Comme b et c sont deux nombres réels strictement positifs, alors $(b+c)/2$ est aussi strictement positif.

a) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$, donc $\frac{2x+a}{3} \geq x^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}$ et en prenant $x = (b+c)/2$, on obtient $\frac{a+b+c}{3} \geq \left(\frac{b+c}{2} \right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}$; l'égalité n'a lieu

que pour $x = a = \frac{b+c}{2}$.

b) $\left(\frac{b+c}{2} \right)^2 - bc = \frac{b^2 + 2bc + c^2}{4} - bc = \frac{b^2 - 2bc + c^2}{4} = \frac{(b-c)^2}{4}$ qui est toujours positif, donc $\left(\frac{b+c}{2} \right)^2 \geq bc$; l'égalité n'a lieu

que si $\left(\frac{b-c}{2} \right)^2 = 0$ soit si $b = c$.

3. Ainsi, pour tous réels a, b, c strictement positifs, on a $\frac{a+b+c}{3} \geq \left(\frac{b+c}{2} \right)^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}} \geq \left(\left(\frac{b+c}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} \geq (bc)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}}$, soit

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \text{ Et l'égalité n'a lieu que lorsque } a = b = c.$$

En fait, le nombre $\frac{a+b+c}{3}$ est la moyenne arithmétique des trois nombres a, b, c et le nombre $\sqrt[3]{abc}$ est la moyenne géométrique de ces trois nombres.