

DEVOIR SURVEILLE N° 3

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A : Question de cours :

On suppose connus les résultats suivants:

- (1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque: l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$;
 - (2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq v_n$;
 - (3) toute suite croissante et majorée est convergente; toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Démontrer alors la proposition suivante : deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.

Partie B:

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée.

Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 .
3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$. On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques: 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. Justifier que, pour tout réel x , $(e^x - x)$ est strictement positif.

Partie B :

1. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Interpréter graphiquement les résultats précédents.
3. Étudier le sens de variations de f .
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
6. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente T.
7. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{-1}{2}$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 (6 points)

1. a) Montrer que pour tout nombre complexe z , $z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$.
b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 8 = 0$.
c) Donner les solutions sous la forme trigonométrique.
2. On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = -2$.

a) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$. En déduire le module et un argument de $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$.

b) Montrer que $z_1^3 = z_2^3 = -8$.