DEVOIR MAISON N° 4

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x+1} = x + 1 - \dfrac{2\,e^x}{e^x+1}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Montrer que les droites (d) et (d') d'équation $y = x - 1$ et $y = x + 1$ sont asymptotes obliques à C.
4. Préciser les positions relatives des droites (d) et (d') par rapport à C.
5. Étudier la parité de la fonction f.
6. En déduire que C admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.
7. Déterminer les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
8. Dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
9. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
10. Justifier que, pour étudier la position de la tangente T par rapport à la courbe C, il suffit d'étudier le signe de $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. En déduire la position de T par rapport à C.
11. Montrer que, pour tout réel a, le coefficient directeur de la tangente en $x = a$ est supérieur à $\dfrac{1}{2}$.
12. Tracer C, (d), (d'), T.

EXERCICE 2

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

a) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes. Justifier la réponse.

b) A l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, conjecturer la limite de (u_n) .

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

a) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes. Justifier la réponse.

b) A l'aide d'un tableur ou de la calculatrice, conjecturer la limite de (u_n) .

3. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 + e^{-n}$ et $v_n = 1 - e^{-n}$.

a) Les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes. Justifier la réponse.

b) Calculer la limite de (u_n) .