

CORRIGÉ DEVOIR MAISON n° 8

EXERCICE 1

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} = u_{n-1} + \frac{1}{n}$.

b) Pour tout entier naturel n non nul, $\int_1^n \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^n = \ln(n)$. Cette intégrale est égale à l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (H) représentative de la fonction inverse, les droites d'équation $x = 1$ et $x = n$ et l'axe des abscisses.

c) En utilisant une interprétation géométrique, montrer que pour tout entier naturel n non nul,

Le terme u_n de la suite correspond à la somme des aires des rectangles de largeur 1 sous la courbe (H) de 0 à n .

Donc $u_n - 1 \leq \ln(n)$; de plus, le terme u_{n-1} de la suite correspond à la somme des aires des rectangles de largeur 1 au-dessus de la courbe (H) de 1 à n . Donc $\ln(n) \leq u_{n-1}$.

Ainsi pour tout entier naturel n non nul, $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_{n-1}$.

d) On sait que $u_{n-1} = u_n - \frac{1}{n}$. Donc $u_n - 1 \leq \ln(n) \leq u_n - \frac{1}{n}$. L'inégalité de gauche donne $u_n \leq 1 + \ln(n)$, et

celle de droite donne $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq u_n$. Donc, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$.

e) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, par les théorèmes de comparaison de limites, comme $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq u_n$,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; et la suite (u_n) est divergente.

2. On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur

$]0; +\infty[$. Et $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x + (1+x)^2 - x(1+x)}{x(1+x)^2} = \frac{1}{x(1+x)^2} > 0$ sur $]0; +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

On peut écrire $f(x) = \frac{1}{1+x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$. Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0$

puisque $\ln 1 = 0$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors pour tout réel $x > 0$, $f(x) < 0$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - \ln(n)$.

a) Pour étudier les variations de la suite (v_n) , on étudie le signe de $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - (u_n - \ln(n)) =$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = f(n).$$

On sait que pour tout $n > 0$, $f(n) < 0$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$, et la suite (v_n) est décroissante.

b) D'après la question 1. d), pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n} + \ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)$,

soit $\frac{1}{n} \leq u_n - \ln(n) \leq 1$, soit $0 \leq v_n \leq 1$.

c) La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. En fait, cette limite est appelée constante d'Euler, environ égale à 0,577215...

EXERCICE 2

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x} + e^{-x} - 1$.

La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$.

Et $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} \leq 0$ sur $[0; +\infty[$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

On sait que $f(0) = 0$ et que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, donc $f(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$.

2. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$.

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient et composée de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Et $g'(x) = \frac{xe^{-x} - (1-e^{-x})}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$. On sait que $f(x) \leq 0$ sur $[0; +\infty[$ et $x^2 \geq 0$, donc $g'(x) \leq 0$ sur $]0; +\infty[$ et

la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-e^{-x}) = 1$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. La fonction g est décroissante sur $]0; +\infty[$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$.

3. On pose, pour tout entier naturel n , $J_n = \int_n^{n+1} g(t) dt$.

a) La fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc pour $n < x < n+1$, $g(n) > g(x) > g(n+1)$.

b) Donc $\int_n^{n+1} g(n) dt > \int_n^{n+1} g(t) dt > \int_n^{n+1} g(n+1) dt$, soit $g(n) \int_n^{n+1} 1 dt > J_n > g(n+1) \int_n^{n+1} 1 dt$.

Or $\int_n^{n+1} 1 dt = [x]_n^{n+1} = n+1 - n = 1$. Donc $g(n) > J_n > g(n+1)$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $g(n) > J_n > g(n+1) > J_{n+1} > g(n+2)$, donc $J_n > J_{n+1}$ et la suite (J_n) est strictement décroissante.

c) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n+1) = 0$, par le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$. La suite (J_n) converge vers 0.