

DEVOIR SURVEILLE N° 2

EXERCICE 1: 1. Pour tout réel x , on a $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, d'où $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+1/e^x} = \frac{1}{(e^x+1)/e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$.

2. a) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^{-x}) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+e^x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$.

b) Interprétation graphique : la courbe C admet deux asymptotes horizontales: la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $-\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et composée de fonctions qui le sont. En utilisant l'expression

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, sa dérivée est $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ puisque e^x est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Donc

la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) Les coordonnées de A milieu de $[MM']$ sont données par $x_A = \frac{x-x}{2} = 0$ et $y_A = \frac{f(x)+f(-x)}{2} =$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) = \frac{e^x(1+e^{-x}) + e^{-x}(1+e^x)}{2(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x + e^x e^{-x} + e^{-x} + e^{-x} e^x}{2(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x + e^{-x} + 2}{2(e^x + e^{-x} + 2)} = \frac{1}{2} \cdot A(0; \frac{1}{2}).$$

b) Le point A est le centre de symétrie de la courbe C. En effet, pour tout réel x , $f(x) + f(-x) = 1 = 2 \times \frac{1}{2}$.

5. La fonction f est continue car dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0; 1[$, donc pour tout réel k de $]0; 1[$, il existe un unique réel x tel que $f(x) = k$.

6. a) Un point d'abscisse a de la courbe C admet une tangente de coefficient directeur égal à $\frac{1}{4}$ si $f'(a) = \frac{1}{4}$. On

cherche donc à résoudre l'équation $f'(x) = \frac{1}{4}$, soit $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{4}$, soit $4e^x = (1+e^x)^2$ et en développant, on obtient $e^{2x} + 2e^x + 1 = 4e^x$, soit $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$, soit $(1-e^x)^2 = 0$, donc $1-e^x = 0$, soit $e^x = 1$, soit $x = 0$. Donc le point de C ayant une tangente de coefficient directeur égal à $\frac{1}{4}$ est le point de coordonnées $(0; f(0)) = (0; \frac{1}{2})$.

b) On cherche le signe de $f'(x) - \frac{1}{4} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{1}{4} = \frac{4e^x - (1+e^x)^2}{4(1+e^x)^2} = \frac{(1-e^x)^2}{4(1+e^x)^2} \geq 0$.

Donc, pour tout réel x , $f'(x) \leq \frac{1}{4}$.

c) Ainsi toutes les tangentes de la courbe C ont un coefficient directeur inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

EXERCICE 2:

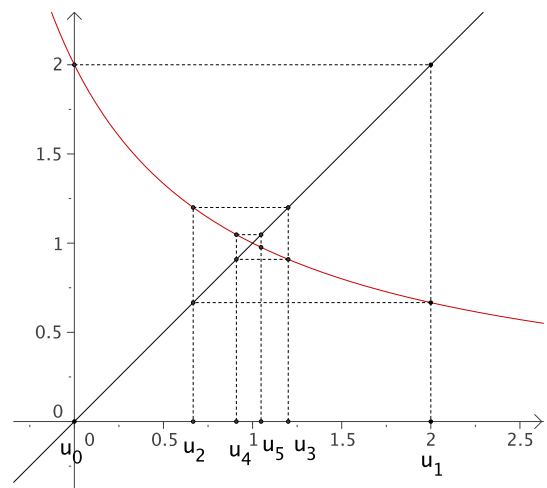
1. Les trois premiers termes de la suite (u_n) : $u_1 = \frac{2}{1+0} = 2$;

$$u_2 = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = \frac{2}{1+x}$.

a) La représentation graphique des six premiers termes de la suite :

b) Conjectures sur la suite (u_n) : elle n'est pas monotone, elle est bornée par 0 et 2, et elle converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$.



3. a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$:

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 2$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité: supposons que pour un entier k , $0 \leq u_k \leq 2$; montrons que $0 \leq u_{k+1} \leq 2$:

$$0 \leq u_k \leq 2, \text{ entraîne } 1 \leq 1 + u_k \leq 3, \text{ entraîne } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_k} u_k \leq 1, \text{ entraîne } \frac{2}{3} \leq \frac{2}{1+u_k} u_k \leq 2,$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{2}{1+u_k} u_k \leq 2, \text{ soit } 0 \leq u_{k+1} \leq 2.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.

b) Les variations de la suite (u_n) : $u_0 < u_1$, $u_2 < u_1$, $u_2 < u_3$, donc la suite n'est pas monotone.

c) La suite (u_n) converge si la conjecture de la question 2. b) est vraie. Sa limite est solution de l'équation $f(x) = x$, soit

$$\frac{2}{1+x} = x, \text{ soit } 2 = (1+x)x \text{ équivaut à } x^2 + x - 2 = 0. \text{ Le discriminant } \Delta = 1 - 4(-2) = 9 > 0, \text{ il y a deux solutions :}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1. \text{ La limite de la suite doit être comprise entre 0 et 2, donc la limite est 1.}$$

$$4. a) v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{\frac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\frac{2+2(1+u_n)}{1+u_n}} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{1-u_n}{2(2+u_n)} = \frac{-1}{2} v_n. \text{ Donc la suite } (v_n) \text{ est}$$

$$\text{géométrique de raison } \frac{-1}{2} \text{ et de premier terme } v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{-1}{2}.$$

$$b) \text{ Donc } v_n = \frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right)^n \text{ et la limite de } (v_n) \text{ est } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \text{ car la raison est strictement comprise entre 0 et 1.}$$

$$c) \text{ On détermine } u_n \text{ en fonction de } n : \text{ de } v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}, \text{ on tire } v_n(u_n+2) = u_n-1, \text{ puis } u_n(v_n-1) = -2v_n-1, \text{ puis}$$

$$u_n = \frac{-2v_n-1}{v_n-1} = \frac{\left(\frac{-1}{2} \right)^n - 1}{\frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right)^n - 1}. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2} \right)^n = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$