

EXERCICE BRAIN-PREPA

1. a) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes C et C' d'équations respectives $y = e^x$ et $y = e^{-x}$.
- b) Soit α un réel quelconque ; T et T' sont les tangentes en α à, respectivement C et C'.
Montrer que T et T' sont perpendiculaires (Propriété P1).
- c) On note H le point de coordonnées $(\alpha ; 0)$ et B et B' les points d'intersection de T et T' avec l'axe des abscisses.
Montrer que H est le milieu de [BB'] (Propriété P2). Représenter T, T', B, B' et H pour $\alpha = 2$.
2. Généralisation : On considère une fonction f dérivable sur \mathbb{R} , et les courbes C et C' d'équation $y = f(x)$ et $y = f(-x)$.
- a) Montrer que la fonction f vérifie la propriété P1 si $f'(\alpha) \times f'(-\alpha) = 1$ pour tout α tel que $f'(\alpha) \neq 0$.
- b) Montrer que la fonction f vérifie la propriété P2 si $f(\alpha) \times f'(-\alpha) \neq f(-\alpha) \times f'(\alpha)$ pour tout α tel que $f'(\alpha) \neq 0$.
- c) Montrer que cette dernière propriété est équivalente à $f(\alpha) \times f(-\alpha) = k$ pour tout α tel que $f'(\alpha) \neq 0$ et où k est une constante réelle.
- d) Trouver une condition sur les réels a et b pour que les fonctions f de la forme $f(x) = ae^{bx}$ possèdent les propriétés P1 et P2.
- e) Déterminer les réels a , b et c pour que les fonctions f de la forme $f(x) = ae^{bx+c}$ possèdent les propriétés P1 et P2.

CORRIGE

1. b) L'équation de T est : $y = e^\alpha x + e^\alpha(1-\alpha)$ et l'équation de T' est :
 $y = -e^{-\alpha}x + e^{-\alpha}(1+\alpha)$; le produit des coefficients directeurs de ces deux droites = $e^\alpha(-e^{-\alpha}) = -1$ donc ces deux droites sont perpendiculaires.

c) Coordonnées de B($\alpha - 1 ; 0$) et B'(1+ $\alpha ; 0$) ; les coordonnées du milieu de [BB'] sont $(\alpha ; 0)$, donc H est le milieu de [BB'].

2. a) L'équation de T : $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$ et l'équation de T' :
 $y = -f'(-\alpha)(x+\alpha) + f(-\alpha)$; le produit des coefficients directeurs de ces deux droites = $-f'(\alpha)f'(-\alpha)$ donc ces deux droites sont perpendiculaires si $-f'(\alpha)f'(-\alpha) = -1$ soit $f'(\alpha)f'(-\alpha) = 1$ et $f'(\alpha) \neq 0$.

b) Si $f'(\alpha) \neq 0$, les coordonnées de B sont $(\frac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \alpha ; 0)$ et

B'($\frac{f(-\alpha)}{f'(-\alpha)} + \alpha ; 0$) ; les coordonnées du milieu de [BB'] sont

$(\frac{1}{2}(\frac{f(-\alpha)}{f'(-\alpha)} + \alpha + \frac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)} + \alpha) ; 0)$, donc H est le milieu de [BB'] si $\frac{f(-\alpha)}{f'(-\alpha)} + \frac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0$ soit

$$f(\alpha) \times f'(-\alpha) \neq f(-\alpha) \times f'(\alpha)$$

c) Si $f(\alpha) \times f(-\alpha) = k$ pour tout α tel que $f'(\alpha) \neq 0$, alors en dérivant comme fonction de α , on obtient $f(-\alpha) \times f'(-\alpha) + f(\alpha) \times f'(\alpha) = 0$ soit $f(\alpha) \times f'(-\alpha) \neq f(-\alpha) \times f'(\alpha)$. Réciproquement, on sait que $(f(-x))' = -f'(-x)$; ainsi, si $f(\alpha) \times f'(-\alpha) \neq f(-\alpha) \times f'(\alpha)$ pour tout α tel que $f'(\alpha) \neq 0$ alors $f(-\alpha) \times f'(-\alpha) + f(\alpha) \times f'(\alpha) = 0$; le membre de droite est une dérivée de la forme $u'v + uv'$, dérivée nulle, donc la fonction est constante : $f(\alpha) \times f(-\alpha) = k$.

d) Les fonctions f de la forme $f(x) = ae^{bx}$ possèdent la propriété P1 si $f'(\alpha)f'(-\alpha) = 1$, soit $abe^{b\alpha} \times abe^{-b\alpha} = (ab)^2 = 1$; et possèdent la propriété P2 si $f(\alpha) \times f(-\alpha) = k$, soit $ae^{b\alpha} \times ae^{-b\alpha} = a^2 = k$ (toujours vérifiée) ; donc la condition est que $(ab)^2 = 1$, soit a et b non nuls et $b = \frac{1}{a}$ ou $b = -\frac{1}{a}$.

e) Les fonctions f de la forme $f(x) = ae^{bx+c}$ possèdent la propriété P1 si $f'(\alpha)f'(-\alpha) = 1$, soit $abe^{b\alpha+c} \times abe^{-b\alpha+c} = (abe^c)^2 = 1$; et possèdent la propriété P2 si $f(\alpha) \times f(-\alpha) = k$, soit $ae^{b\alpha+c} \times ae^{-b\alpha+c} = (ae^c)^2 = k$ (toujours vérifiée) ; donc la condition est que $(abe^c)^2 = 1$.

