CORRIGE DEVOIR SURVEILLE N° 3

EXERCICE 1 : 1. $u_1 = \dfrac{2u_0+v_0}{3} = \dfrac{7}{3}$, $v_1 = \dfrac{u_0+3v_0}{4} = \dfrac{21}{4}$, $u_2 = \dfrac{119}{36}$, $v_2 = \dfrac{217}{48}$.

2. a) On a $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n+3v_n}{4} - \dfrac{2u_n+v_n}{3} = \dfrac{3(u_n+3v_n)-4(2u_n+v_n)}{12} = \dfrac{5v_n-5u_n}{12} = \dfrac{5w_n}{12}$. Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 7$.

b) Ainsi $w_n = 7\left(\dfrac{5}{12}\right)^2$. La raison de la suite est strictement comprise entre – 1 et 1, donc la limite de (w_n) est 0.

Comme 7 et $\dfrac{5}{12}$ sont strictement positif, alors pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.

3. a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n+v_n}{3} - u_n = \dfrac{2u_n+v_n-3u_n}{3} = \dfrac{v_n-u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3} > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.

b) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n+3v_n-4v_n}{4} = \dfrac{u_n-v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4} < 0$, donc (v_n) est strictement décroissante.

c) On sait que (u_n) est strictement croissante, (v_n) est strictement décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc ces deux suites sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers la même limite.

4. a) $t_{n+1} = 3\,u_{n+1} + 4\,v_{n+1} = 3\,\dfrac{2u_n+v_n}{3} + 4\,\dfrac{u_n+3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n = 3u_n + 4v_n = t_n$. Donc la suite (t_n) est constante égale à $t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 28$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 28$.

b) $u_n = v_n - w_n = \dfrac{t_n-3u_n}{4} - w_n = \dfrac{t_n-3u_n-4w_n}{4}$; soit $4u_n = t_n - 3u_n - 4w_n$, et $u_n = \dfrac{t_n-4w_n}{7}$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{t_n-4w_n}{7} = \dfrac{28-4\times 0}{7} = 4$.

EXERCICE 2 : 1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. Il reste à vérifier que la fonction est continue en 0: On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x-0}$ = nombre dérivé de e^x en 0 = 1 = $f(0)$. Donc la fonction f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

2. On peut écrire $f(x) = \dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x}$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1) = -1$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. On en déduit que la courbe C admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

3. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont. Pour tout $x \neq 0$,
$f'(x) = \dfrac{e^x\times x-(e^x-1)\times 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ où $g(x) = (x-1)e^x + 1$.

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions qui le sont. On a $g'(x) = e^x + (x-1)e^x = x\,e^x$.
Le signe de g' est le signe de x puisque pour tout réel x, $e^x > 0$. Ainsi la fonction g est décroissante sur $]-\infty\,; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = (0-1)e^0 + 1 = -1 + 1 = 0$.

c) Le minimum de g étant 0, la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$.

d) Le signe de f' est le signe de $g(x)$ puisque pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$. Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 : 1. On résout l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$: $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4\times 4 = -4 < 0$, il y a donc deux solutions complexes: $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

2. Les formes exponentielles de z_1 et z_2 : calculons les modules : comme $z_2 = \overline{z_1}$, $|z_2| = |z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

Posons θ_1 = un argument de $z_1 = \arg(z_1)$. Alors $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta_1 = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta_1 = \dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

Posons $\theta_2 = \arg(z_2)$. Alors $\theta_2 = \arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1) = -\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$.

Ainsi $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

3. $(z_1)^6 = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6 = 2^6\, e^{i\pi} = 64(-1) = -64$ qui est un nombre réel strictement négatif.

4. On veut trouver n tel que $(z_2)^n$ soit un nombre réel strictement positif. $(z_2)^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n\, e^{-i\frac{n\pi}{6}}$. Le nombre complexe $e^{-i\frac{n\pi}{6}}$ est un réel positif si $\dfrac{n\pi}{6}$ est un multiple de 2π ; on peut donc prendre $n = 12$ (ou $12k$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

5. La solution réelle de l'équation : $z^3 = 8$ est 2 puisque $2^3 = 8$.

6. L'équation précédente est équivalente à $z^3 - 8 = 0$. Le polynôme $z^3 - 8$ se factorise par $z - 2$ puisque 2 est solution de l'équation $z^3 - 8 = 0$. Ainsi $z^3 - 8 = (z-2)(az^2 + bz + c)$. on détermine a, b, c par identification:
$(z-2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b-2a)z^2 + (c-2b)z - 2c$. Soit $a = 1$, $b - 2a = 0$, $c - 2b = 0$ et $1 - 2c = -8$.
On trouve $a = 1$, $b = 2$ et $c = 4$. On résout alors l'équation $z^2 + 2z + 4 = 0$: $\Delta = (2)^2 - 4\times 4 = -12 < 0$, il y a donc deux solutions complexes: $z_3 = \dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}\,i$ et $z_2 = \dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$.

7. On sait que pour tout nombre complexe z, $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et que $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
Donc $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1) = 2\sqrt{3}$ et $z_3 + z_4 = z_3 + \overline{z_3} = 2i\,\mathrm{Im}(z_3) = 2i\sqrt{3}$.
Ainsi $\dfrac{z_1+z_2}{z_3-z_4} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}} = \dfrac{1}{i} = -i$.