

CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 5

EXERCICE 1 : 1. Résultat du cours: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} =$ nombre dérivé de la fonction \ln en $1 = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ en posant $h = e^x$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = 0$.

3. Pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x) = e^{-x} \ln(e^x(1+e^{-x})) = e^{-x}(\ln(e^x) + \ln(1+e^{-x})) = xe^{-x} + e^{-x}(\ln(1+e^{-x})) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^{-x})$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5. Ainsi la courbe C admet deux asymptotes horizontales: une en $-\infty$ d'équation $y = 1$, l'autre en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

6. La fonction g est dérivable sur $] -1 ; +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont; $g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{-t}{(1+t)^2}$.

Cette dérivée est du signe de $-t$ soit négatif sur $[0 ; +\infty[$, donc la fonction g est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

7. De plus $g(0) = 0$ qui est le maximum de g sur $[0 ; +\infty[$, donc $g(t) \leq 0$ lorsque $t > 0$.

8. $f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + e^{-x} \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) = -e^{-x}(g(e^x))$. On a vu que pour $t > 0$, $g(t) \leq 0$, donc pour tout x réel, $e^x > 0$,

donc $g(e^x) \leq 0$, et $f'(x) \leq 0$.

9. La fonction f est donc décroissante de 1 vers 0.

EXERCICE 2

1. a) $p_{R_n}(R_{n+1}) =$ probabilité que l'employé soit en retard le jour $n+1$, sachant qu'il était en retard la veille = $1/20$.

$p_{\bar{R}_n}(R_{n+1}) =$ probabilité que l'employé soit en retard le jour $n+1$, sachant qu'il n'était pas en retard la veille = $1/5$.

b) $p(R_n \cap R_{n+1}) = p_{R_n}(R_{n+1}) p(R_n) = \frac{1}{20} p_n$, et $p(R_{n+1} \cap \bar{R}_n) = p_{\bar{R}_n}(R_{n+1}) p(\bar{R}_n) = \frac{1}{5} q_n$.

c) En utilisant la formule des probabilités totales, $p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p(R_{n+1} \cap \bar{R}_n) = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} q_n$.

d) Comme $q_n = 1 - p_n$, on a $p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} (1 - p_n) = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$.

2. a) $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n - \frac{4}{23} = \frac{3}{115} - \frac{3}{20} p_n = \frac{-3}{20} (p_n - \frac{4}{23}) = \frac{-3}{20} v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{-3}{20}$ et son premier terme est $v_1 = p_1 - \frac{4}{23} = \frac{-4}{23}$.

b) Donc $v_n = \frac{-4}{23} \left(\frac{-3}{20} \right)^{n-1}$ et $p_n = v_n + \frac{4}{23} = \frac{4}{23} \left(1 - \left(\frac{-3}{20} \right)^{n-1} \right)$.

c) La raison de la suite $(v_n) : 0 < \frac{-3}{20} < 1$, donc la limite de (v_n) est 0; ainsi la suite (p_n) converge vers $\frac{4}{23}$.

EXERCICE 3 : 1. A. 1. Limite en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions qui le sont. $h'(x) = (2x+1)e^{-x} + (x^2+x+1)(-e^{-x}) = (x-x^2)(e^{-x})$ est du signe de $x-x^2$; d'où le tableau de variations sur \mathbb{R} :

3. Sur $] -\infty ; 1[$, la fonction h atteint son minimum 0 pour $x = 0$; première solution de l'équation $h(x) = 0$. Sur $[1 ; +\infty[$ la fonction h est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[3/e-1 ; -1[$ et $0 \in [3/e-1 ; -1[$, donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1 ; +\infty[$.

4. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $1,79 < \alpha < 1,80$.

5. $h(x)$ est positif sur $] -\infty ; \alpha[$ et négatif sur $[\alpha ; +\infty[$.

B: 1. Pour tout réel x , $f(x) - g(x) = (2x+1)e^{-x} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)(x^2+x+1)e^{-x} - (2x+1)}{x^2+x+1} = \frac{(2x+1)h(x)}{x^2+x+1}$. Cette

quantité est du signe du numérateur, d'où le tableau:

3. La position relative des courbes C_f et C_g dans le tableau :

4. Tangente au point d'abscisse 0 des courbes C_f et C_g : $y = x + 1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	-
$h(x)$	$+\infty$	0	$3/e-1$	-1

x	$-\infty$	$-1/2$	0	α	$+\infty$
$2x+1$	-	0	+	+	+
$h(x)$	+		+	0	-
$f-g$	-	0	+	0	-
position	C_f au-dessous		C_f au-dessus		C_f au-dessous