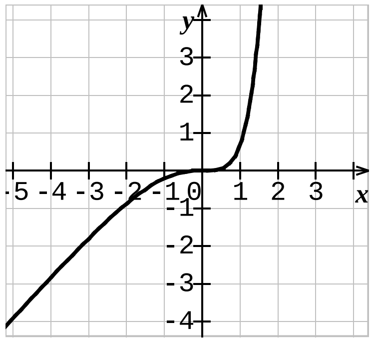
CORRECTION DEVOIR SURVEILLE N° 6

EXERCICE 1 : 1. Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \le k < n$, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!k+(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

2. D'après la question précédente, pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$, on a : $\binom{n-2}{k-2} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-1}{k}$; en faisant la somme de ces deux égalités, on obtient : $\binom{n-2}{k-2} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

EXERCICE 2 : 1. La courbe repésentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$ a l'allure ci-contre:



2. D'après cette représentation graphique, on peut conjecturer que :
(a) La fonction f est croissante sur [– 5; 4] ;
(b) Il y a une solution à l'équation $f(x) = 0$ car la fonction est continue et croissante sur ce même intervalle.

3. a) On pose $X = e^x$. L'inéquation devient $X^2 - 2{,}1X + 1{,}1 \ge 0$. Le discriminant est $\Delta = (-2{,}1)^2 - 4 \times 1{,}1 = 0{,}01 = 0{,}1^2$; donc l'équation $X^2 - 2{,}1X + 1{,}1 = 0$ a deux solutions $X_1 = \frac{2{,}1+0{,}1}{2} = 1{,}1$ et $X_2 = \frac{2{,}1-0{,}1}{2} = 1$, donc $x_1 = \ln 1{,}1$ et $x_2 = \ln 1 = 0$. Le signe de $e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1$ est donné dans le tableau suivant:

x	$-\infty$		0		$\ln 1{,}1$		$+\infty$
$e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc la solution de l'inéquation $e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1 \ge 0$ est $S =]-\infty; 0] \cup [\ln 1{,}1; +\infty[$.

b) La fonction f est dérivable sur **R** comme somme et composée de fonctions qui le sont. Sa dérivée est $f'(x) = e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1$, donc la question précédente nous fournit le signe de $f'(x)$. Ainsi la fonction f est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[\ln 1{,}1; +\infty[$ et elle est décroissante sur $[0; \ln 1{,}1]$.

c) On a $f(0) = 0$ et $f(\ln 1{,}1) = 0{,}195 - 1{,}1\ln 1{,}1 \approx -0{,}000163 < 0$. Sur $]-\infty; 0]$, f est croissante et son maximum est 0 atteint en x = 0. Sur $]0; \ln 1{,}1]$, $f(x) < 0$. Sur $[\ln 1{,}1; +\infty[$, f est continue, strictement croissante et change de signes, donc il y a deux solutions à l'équation $f(x) = 0$; l'une est 0 et l'autre est $> \ln 1{,}1$.

4. Pour représenter la courbe de f sur $[-0{,}05 ; 0{,}15]$, les valeurs extrêmes de y sont – 0,000165 et 0,000078.

5. $\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{4}e^{2x} - 2{,}1e^x + \frac{1{,}1}{2}x^2 + 1{,}6x \right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - 2{,}1e + 0{,}55 + 1{,}6 - \frac{1}{4} + 2{,}1 = \frac{1}{4}e^2 - 2{,}1e + 4$.

EXERCICE 3 : 1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{2X}{X+1} = 2$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{2}{X+1} = 0$; $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

2. La fonction f est de la forme $2\frac{u'}{u}$, donc une primitive de la fonction f est la fonction F : $F(x) = 2\ln(e^x + 1)$.

3. Pour tout x réel, $f(x) + g(x) = \frac{2e^x}{e^x+1} + \frac{2}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = 2$. Donc $g(x) = 2 - f(x) = 2 - \frac{2e^x}{e^x+1}$.

4. $I = \int_0^{\ln 2} f(x)dx = F(\ln 2) - F(0) = 2\ln(2+1) - 2\ln(1+1) = 2\ln(3/2) = \ln(9/4)$ et $J = \int_0^{\ln 2} g(x)dx = [2x - F(x)]_0^{\ln 2}$ $= 2\ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 = \ln 4 - \ln 9 + \ln 4 = \ln(16/9)$.

EXERCICE 4 : 1. Les tirages de 4 boules étant simultanés, il n'y a ni ordre ni remise; il s'agit donc de combinaisons. $p(A) = \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{2}+\binom{7}{1}\binom{3}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{3}$. De plus p(4 rouges) = $\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{6}$.

2. a) X prend ses valeurs dans { 10; 0; – 5};
de plus $p(X = 0) = p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(X = -5) = p(B) = \frac{1}{3}$; $p(X = 10) = p(\text{obtenir 4 boules rouges}) = \frac{1}{6}$.

b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = 10\,p(X = 10) - 5\,p(X = -5) = 0$. Donc le jeu est équitable.