

DEVOIR SURVEILLE N° 6

EXERCICE 1 (3 points)

1. Démonstration de cours: Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \leq k < n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2} + 2 \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k} = \binom{n}{k}.$$

EXERCICE 2 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - 2,1e^x + 1,1x + 1,6$.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leq x \leq 4, -4 \leq y \leq 4$.

Reproduire l'allure de la courbe obtenue ci-contre:

2. D'après cette représentation graphique, que peut-on conjecturer :

(a) Sur les variations de la fonction f ?

(b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose d'étudier la fonction f .

a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation

$$e^{2x} - 2,1e^x + 1,1 \geq 0.$$

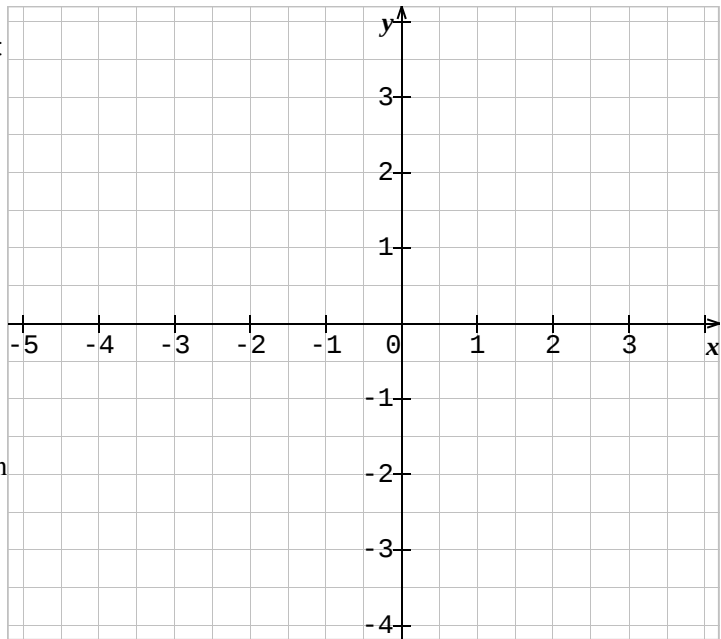
b) Etudier les variations de la fonction f .

c) Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05; 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.

Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

5. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$.



EXERCICE 3 (4 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$ et $g(x) = \frac{2}{e^x+1}$.

1. Déterminer les limites de f et de g aux bornes de leur domaine de définition.

2. Déterminer une primitive de la fonction f .

3. Montrer que pour tout x réel, $f(x) + g(x) = 2$.

4. Calculer les intégrales $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$ et $J = \int_0^{\ln 2} g(x) dx$.

Question subsidiaire : Ecrire I et J sous la forme $\ln a$ où a est une fraction.

EXERCICE 4 (5 points)

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, dont 7 sont rouges et 3 sont blanches. Un joueur tire simultanément quatre boules de cette urne.

1. On note les événements A : « Obtenir exactement trois boules rouges »; B : « Obtenir au plus deux boules rouges ». Montrer que $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(B) = \frac{1}{3}$.

2. Le joueur mise 5 euros, et effectue un tirage. S'il tire 4 boules rouges, il gagne 15 euros; s'il tire 3 boules rouges, il gagne 5 euros et sinon il ne gagne rien.

a) On note X le gain algébrique du joueur (son gain moins sa mise). Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Le jeu est-il équitable (espérance mathématique de X nulle) ?