

DEVOIR SURVEILLE N° 9

EXERCICE 4

Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, **parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses**. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée. Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point. Toute réponse juste rapporte 0,5 point. Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z = 0$.
 - a. La distance du point O au plan P est égale à 1.
 - b. La distance du point O au plan P est égale à $\frac{1}{\sqrt{29}}$.
 - c. Le vecteur $\vec{n}(1; \frac{3}{2}; 2)$ est un vecteur normal au plan P.
 - d. Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2. On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point $A(1; 1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -4; -2)$.
 - a. La droite D est parallèle au plan P.
 - b. La droite D est orthogonale au plan P.
 - c. La droite D est sécante avec le plan P.
 - d. Un système d'équations paramétriques de D est
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-4t \\ z=1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3. On désigne par E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$.
Soit le point $A(1; 1; 1)$.
 - a. L'ensemble E contient un seul point, le point A.
 - b. L'ensemble E est une droite passant par A.
 - c. L'ensemble E est un plan passant par A.
 - d. L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1; -3; 2)$.

4. ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).
 - a. Le plan P contient toujours le point D.
 - b. Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.
 - c. Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\vec{BM} \cdot \vec{BC} = \vec{BA} \cdot \vec{BC}$.
 - d. Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

EXERCICE 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $\frac{z-4}{z} = i$. Écrire la solution sous forme algébrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3. Soient A, B, A' et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$a = 2, \quad b = 4, \quad a' = 2i \quad \text{et} \quad d = 2 + 2i$. Quelle est la nature du triangle ODB ? Justifier.

4. Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - i\sqrt{3}$ et $f = 1 + i\sqrt{3}$.

Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ? Justifier.

5. Soit C le cercle de centre A et de rayon 2. Soit C' le cercle de centre A' et de rayon 2.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

a. On désigne par E' l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E'.

b. Démontrer que le point E' est un point du cercle C'.

c. Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3})$

EXERCICE 4

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$.

a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$.

c. Dresser le tableau de variations de f .

d. Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 .

b. On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$. Déterminer I_2 et I_3 .

c. Soit A l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$. Calculer A.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction v sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$.

a. On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a; b]$ (où $0 < a < b$).

Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right]$.

b. On définit maintenant la fonction g par $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

c. Dédire des questions précédentes le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

EXERCICE 4

Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$.

On définit les évènements suivants :

- A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
- B : « le jardinier a choisi le lot 2 »
- J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

1. Dans cette question, on suppose que le jardinier choisit le lot 1.

- a. Quelle loi de probabilité suit le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1 ?
- b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?
- c. Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
- d. Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.

2. Probabilités conditionnelles

a. Montrer que : $P_B(J_n) = \binom{50}{n} 2^{-50}$.

b. En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.

c. On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé.

Établir que
$$p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}.$$

d. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?