

EXERCICE 1 : 1. a) Pour montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, il suffit de montrer que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires : $\vec{AB}(0; 1; 2)$ et $\vec{AC}(-2; 1; -1)$; les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires et les points ne sont pas alignés.

b) Pour vérifier que le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} , on calcule les produits scalaires :

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 3 \times 0 + 4 \times 1 - 2 \times 2 = 0$; $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 3 \times (-2) + 4 \times 1 - 2 \times (-1) = 0$; donc \vec{n} est bien orthogonal aux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} . Une équation cartésienne du plan (ABC) est donnée par $ax + by + cz + d = 0$, où $(a; b; c)$ sont les coordonnées d'un vecteur normal, ici \vec{n} . De plus, le plan (ABC) contient le point A, d'où $3 \times 1 + 4 \times 0 - 2 \times 2 + d = 0$, soit $d = 1$. Une équation de (ABC) est : $3x + 4y - 2z + 1 = 0$.

2. a) Un vecteur normal à P_1 est : $\vec{n}_1(2; 1; 2)$ et un vecteur normal à P_2 est : $\vec{n}_2(1; -2; 6)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les plans ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants suivant une droite D vérifiant le système :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \text{ on tire } x = 2y - 6z \text{ et en remplaçant dans l'autre équation : } 2(2y - 6z) + y + 2z + 1 = 0, \text{ soit}$$

$5y - 10z + 1 = 0$, d'où $y = 2z - 1/5$ et $x = 2(2z - 1/5) - 6z = -2z - 2/5$. Un système d'équations paramétriques de

$$D \text{ est } \begin{cases} x = -2t - 2/5 \\ y = 2t - 1/5 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

b) On résout l'équation $3(-2t - 2/5) + 4(2t - 1/5) - 2t + 1 = 0$; on trouve $0t = 1$ qui n'a pas de solution, donc la droite D et le plan (ABC) sont parallèles.

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t .

a) La somme des coefficients 1, 2 et t égale $3 + t$, et comme t est un réel positif, cette somme est non nulle, donc le point G existe pour tout réel positif t .

Le point I a pour coordonnées $x_I = \frac{x_A + 2x_B}{1+2} = 1$, $y_I = \frac{y_A + 2y_B}{1+2} = \frac{2}{3}$, $z_I = \frac{z_A + 2z_B}{1+2} = \frac{10}{3}$.

On a $\vec{GA} + 2\vec{GB} + t\vec{GC} = \vec{0}$ et $\vec{GA} + 2\vec{GB} = 3\vec{GI}$, d'où $3\vec{GI} + t\vec{GC} = \vec{0}$, soit $\vec{IG} = \frac{t}{3+t}\vec{IC}$.

b) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = \frac{t}{3+t}$. Cette fonction est dérivable comme fonction rationnelle,

et $f'(t) = \frac{1}{(3+t)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$; $f(0) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$; donc pour tout réel t positif, $0 \leq f(t) < 1$; comme $\vec{IG} = f(t)\vec{IC}$, alors l'ensemble des points G est le segment [IC] privé du point C.

c) Le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G si $\frac{t}{3+t} = \frac{1}{2}$, soit $2t = 3 + t$, soit $t = 3$.

EXERCICE 2 : 1. a. Supposons qu'il existe un réel α tel que $f'(\alpha) = 0$. Dans ce cas, avec la propriété (1), $(f'(\alpha))^2 - (f(\alpha))^2 = 1$, soit $(f(\alpha))^2 = -1$, ce qui est impossible. Donc pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$.

b. Pour $x = 0$, en utilisant la propriété (1), il vient $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$, soit $f(0) = 0$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), et sachant que $(u^2)' = 2uu'$,

on obtient $2f'(x)f''(x) - 2f'(x)f'(x) = 0$; soit $2f'(x)(f''(x) - f'(x)) = 0$; comme pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$ alors: pour tout nombre réel x , $f''(x) = f'(x)$.

3. a. On a $u(0) = f'(0) + f(0) = 1$ et $v(0) = f'(0) - f(0) = 1$.

b. Pour tout réel x , $u'(x) = f''(x) + f'(x) = f'(x) + f'(x) = u(x)$ et $v'(x) = f''(x) - f'(x) = f'(x) - f'(x) = -v(x)$.

c. Les fonctions u et v sont solutions d'équations différentielles : $y' = y$ pour u , et $y' = -y$ pour v .

Solutions de $y' = y$: $u(x) = Ce^x$. Comme $u(0) = 1$, alors $C = 1$, soit $u(x) = e^x$. Solutions de $y' = -y$: $v(x) = Ce^{-x}$.

Comme $v(0) = 1$, alors $C = 1$, soit $v(x) = e^{-x}$.

d. Comme $u(x) = f'(x) + f(x)$ et $v(x) = f'(x) - f(x)$, en faisant la différence de ces deux égalités,

on obtient $u(x) - v(x) = 2f(x)$; donc, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ É, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

b. $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ puisque pour tout réel x , $e^x > 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. a. La fonction f est continue et strictement croissante de \mathbf{R} dans \mathbf{R} ; ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ a une unique solution dans \mathbf{R} .

b. Lorsque $m = 3$, on a $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$, soit $e^x - e^{-x} = 6$. On pose $X = e^x$; l'équation devient $X - 1/X = 6$, soit $X^2 - 1 = 6X$, ou $X^2 - 6X - 1 = 0$; cette équation a deux solutions réelles : $X_1 = 3 + \sqrt{10}$ et $X_2 = 3 - \sqrt{10}$; X_2 est strictement négatif, d'où la solution de $f(x) = 3$ est $x_1 = \ln(3 + \sqrt{10}) \approx 1,82$.

6. a. Équation de la tangente à C en $x = 0$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x$.

Tracé de la courbe C représentative de la fonction f :

b. Le domaine du plan, ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $0 \leq x \leq \ln 3$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est en bleu.

c. Une primitive de f est $F(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

L'aire, en unité d'aire, de ce domaine est égale à

$$\int_0^{\ln 3} f(x) dx = F(\ln 3) - F(0) = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2} - 1 = \frac{2}{3} \text{ u.a.}$$

L'aire en cm^2 est égale à $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} \text{ cm}^2$.

