

EXERCICE 1 (8 points) Centre de préparation de concours Brainprépa

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1; 0; 2)$, $(1; 1; 4)$ et $(-1; 1; 1)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3; 4; -2)$.

Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

a) Montrer que les plans sont sécants suivant une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.

b) La droite D et le plan (ABC) sont-ils sécants ou bien parallèles ?

3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1, 2 et t .

a) Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t .

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I.

Exprimer le vecteur $\vec{IG}$ en fonction du vecteur $\vec{IC}$.

b) Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nul est le segment [IC] privé du point C.

c) Pour quelle valeur de t , le milieu J du segment [IC] coïncide-t-il avec G ?

EXERCICE 2 (8 points)

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) pour tout nombre réel x , $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$,

(2) $f'(0) = 1$,

(3) la fonction f' est dérivable sur $\mathbf{R}$.

1. a. Démontrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) \neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) pour tout nombre réel x , $f''(x) = f(x)$, où f'' désigne la fonction dérivée seconde de f .

3. On pose $u = f' + f$ et $v = f' - f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u' = u$ et $v' = -v$.

c. En déduire les fonctions u et v .

d. En déduire que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

4. a. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ a une unique solution dans $\mathbf{R}$.

b. Déterminer cette solution lorsque $m = 3$ (on en donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).

6. a. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm), ainsi que la tangente à C au point d'abscisse 0.

b. Colorier le domaine du plan, ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $0 \leq x \leq \ln 3$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

c. Déterminer l'aire de ce domaine en cm^2 .