CORRIGE DE L'EXAMEN CHEZ BRAIN-PREPA

EXERCICE 1

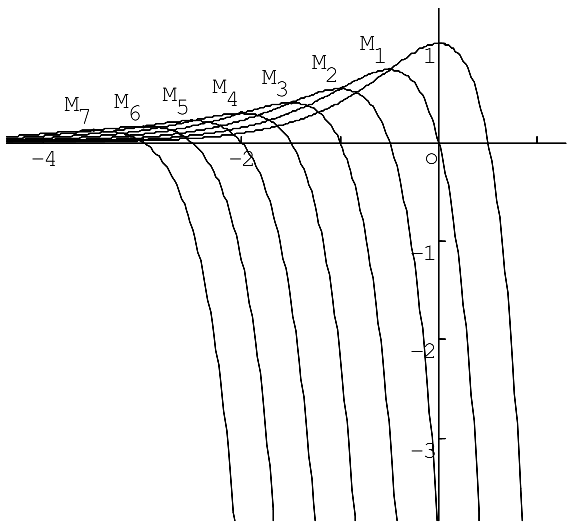
1. $f'(x) = (-4x)e^{2x}$, $f^{(2)}(x) = (-4-8x)e^{2x}$ et $f^{(3)}(x) = (-16-16x)e^{2x}$.

2. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$: pour $n = 1$, la propriété est vraie. Supposons que pour un n, $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ et montrons que $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x} = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$: On a $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = 2^n(-2)e^{2x} + 2^n(1-n-2x)2e^{2x} = 2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x} = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$. D'où la récurrence...

3. a) La courbe représentative de $f^{(n)}$ a une tangente horizontale en $M_n(x_n\ ;\ y_n)$ si $f^{(n+1)}(x_n) = 0$ et $f^{(n)}(x_n) = y_n$;

On a $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x} = 0$ si $x = -\dfrac{n}{2}$, donc $x_n = -\dfrac{n}{2}$ et $y_n = f^{(n)}(x_n) = 2^n(e^{-n})$

a) On a pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{e^{2x_n}}{4^{x_n}} = \dfrac{e^{-n}}{4^{\frac{-n}{2}}} = \dfrac{e^{-n}}{2^{-n}} = 2^n e^{-n} = y_n$, donc les points M_n appartiennent bien à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{e^{2x}}{4^x}$.



b) On a $x_n = -\dfrac{n}{2}$, donc la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$. Cette suite tend vers $-\infty$.

c) On a $y_n = 2^n e^{-n} = \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$, donc la suite (y_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{e}$. La raison $\dfrac{2}{e}$ est strictement comprise entre 0 et 1 donc la limite de cette suite est 0.

EXERCICE 2

La fonction f est définie sur IR par $f(x) = (x^2+x-1)e^x$. On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}, f^{(4)}, \ldots$ les dérivées successives de *f*.

1. $f'(x) = (x^2+3x)e^x$, $f''(x) = (x^2+5x+3)e^x$.

2. a) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2+a_nx+b_n)e^x$ avec $a_n = a_{n-1}+2$ et $b_n = b_{n-1}+a_{n-1}$: pour $n = 1$, on a $f'(x) = (x^2+3x)e^x$ donc avec $a_1 = 3 = a_0+2$ et $b_1 = 0 = a_0+b_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons que pour un $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2+a_nx+b_n)e^x$ avec $a_n = a_{n-1}+2$ et $b_n = b_{n-1}+a_{n-1}$ et montrons que $f^{(n+1)}(x) = (x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x$ avec $a_{n+1} = a_n+2$ et $b_{n+1} = b_n+a_n$:
$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (2x+a_n)e^x + (x^2+a_nx+b_n)e^x = (x^2+(a_n+2)x+(b_n+a_n))e^x$. La récurrence est bien démontrée...

b) $a_1 = 3$, $b_1 = 0$ et $a_{n+1} = a_n+2$, $b_{n+1} = b_n+a_n$; on montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, a_n et b_n sont des entiers relatifs : la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif ...

3. a) On a $a_1 = 3$ et $a_{n+1} = a_n+2$ donc la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 ; pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2(n-1)+3 = 2n+1$.

b) On a, pour tout $n \geq 1$:

$b_n = a_{n-1}+b_{n-1} = a_{n-1}+a_{n-2}+b_{n-2} = a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+b_{n-3} =$

$= \ldots = a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_2+a_1+b_1$. Comme $b_1 = 0$, on a bien

$b_n = a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_2+a_1$.

Donc b_n est égale à la somme des *n*-1 premiers termes d'une suite arithmétique, donc , pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{n-1}{2}(a_{n-1}+a_1) = \frac{n-1}{2}(2(n-1)+1+3) = n^2-1 .$$