

EXAMEN CHEZ BRAIN-PREPA

EXERCICE 1

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (1-2x)e^{2x}$. On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ... les dérivées successives de f .

1. Déterminer $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$.
3. Pour tout entier n non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point noté M_n .
 - a) Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n et vérifier que les points M_n appartiennent à la courbe Γ d'équation $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$.
 - b) Démontrer que la suite (x_n) est une suite arithmétique. Quelle est la limite de cette suite ?
 - c) Démontrer que la suite (y_n) est une suite géométrique. Etudier la limite de cette suite ?

EXERCICE 2

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$. On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ... les dérivées successives de f .

1. Calculer pour tout réel x , f' et $f^{(2)}$.
2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ avec $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = b_n + a_n$.
 - b) Dédisez-en que a_n et b_n sont des entiers relatifs.
3. On se propose dans cette question d'exprimer a_n et b_n en fonction de n .
 - a) Vérifier que la suite a_n est une suite arithmétique. Dédisez-en a_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.
 - b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$: $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$. Dédisez-en b_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.