EXAMEN DE FIN DE SEMAINE CENTRE BRAIN-PREPA

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en +∞.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son sens de variations sur]0 ; + ∞[.
3. Tracer la représentation graphique de f dans le plan.
4. On pose, pour $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \dfrac{(\ln x)^p}{x^2} dx$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de I_1.
5. Montrer que, pour $p \geq 1$, $I_{p+1} = -\dfrac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$. En déduire les valeurs exactes de I_2, I_3, I_4.

EXERCICE 2

Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur I = [0 ; + ∞[par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$. On considère un réel a de I et on pose, pour tout entier naturel n, $I_n(a) = \int_0^a f_n(x)dx$.

1. Calculer $I_0(a)$.
2. a) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n entier naturel non nul : $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$.

c) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{a^k}{k!}\right)e^{-a}$.

3. Dans cette question, on pose $a = 1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}\right)e^{-1} = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, et pour tout x de [0 ;1] : $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n!}x^n$.

b) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{(n+1)!}$ puis la limite de u_n.

c) Déduire enfin que $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k!}\right) = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{1}{5!} + \dfrac{1}{6!} + \ldots$