CORRECTIONS DE MATHEMATIQUES 2005

www.tousleconcours.info

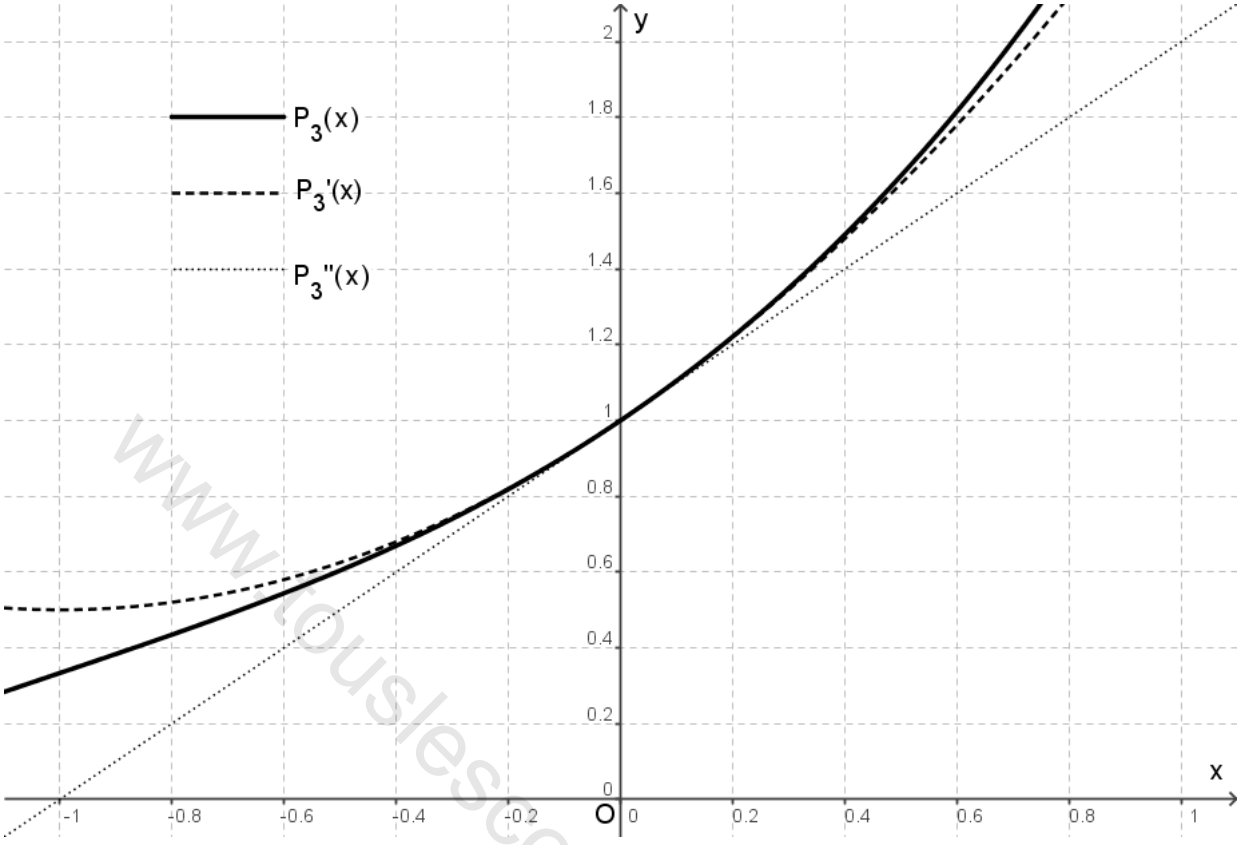
SUJET N°1

EXERCICE 1 : Suite et fonction

1)

On a : $P_3(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$ et $P_3'(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$ et enfin $P_3''(x) = x + 1$

La représentation est la suivante



2)

a.

Soit une fonction polynôme réelle de degré n $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_n \neq 0$,

$P'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^i$ est un polynôme de degré n-1

Donc cette condition n'est pas satisfaisante par une fonction polynôme à variable réelle

b. On a :

$f_3(x) = \frac{1}{3!}x^3 + f_2(x) = \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{2!}x^2 + f_1(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = P_3(x)$

c. Montrons par récurrence que : $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{f_n(x)} = \sum_{\mathbf{0}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x^i}}{\mathbf{i}}$

On a : $f_0(x) = \sum_0^0 \frac{x^0}{0!} = 1$ et $f_0(x) = 1$

Supposons que : $f_n(x) = \sum_0^n \frac{x^i}{i!}$ pour $n \geq 0$, il vient $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_0^n \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_0^{n+1} \frac{x^i}{i!}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \sum_0^n \frac{x^i}{i!}$$

d. Expression de $f_{10}(2) - f'_{10}(2)$

www.touslesconcours.info

$$f_{10}(2) = \sum_{0}^{10} \frac{2^i}{i!} \; et \; f_{10}(2) = \sum_{1}^{10} \frac{2^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{0}^{9} \frac{2^i}{i!} = f_9(2)$$

D'où

$$f_{10}(2) - f'_{10}(2) = f_{10}(2) - f_9(2) = \frac{2^{10}}{10!} = \frac{4}{14175}$$

EXERCICE 2 : Plan complexe

1) Valeurs éventuelles de z telles que A, B et C ne soient pas distincts deux à deux

On a : $z_A = z_B = z_C \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = z_B \\ z_A = z_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = z^2 \\ z = z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(z-1) = 0 \\ z(z-1)(z+1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 0 \; ou \; z = -1 \; ou \; z = 1$ donc $\boxed{\boldsymbol{z \in \{-1, 0, 1\}}}$

2) Partie E des points A de $\mathcal{P}$ telle que A, B et C soient alignés

$$E = \left\{ A(z) \in \mathcal{P} \setminus \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^* \; ; \; z_A \neq z_B \neq z_C \right\}$$

On a : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} = z + 1$ car $z \notin \{-1; 0; 1\}$

D'où $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = z + 1 = (x + 1 + iy) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc

$$\boxed{\boldsymbol{E = \{A(z = x + iy) \in \mathcal{P} \; avec \; (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq -1 \; et \; y = 0\}} = axe \; des \; abscisses \; privé \; du \; point \; (-1{,}0)}$$

3) Montrons que A, B et C ne peuvent pas appartenir à un même cercle centré en O autre que le cercle de centre O et de rayon 1

Pour cela, supposons que A, B et C appartiennent au cercle centré en O $(\Gamma_n): x^2 + y^2 = n^2 \; / \; n \in \mathbb{R}_+$ et montrons que $n \in \{0; 1\}$

$$\begin{cases} A \in (\Gamma_n) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OA}\| = n \Leftrightarrow |z| = n \\ B \in (\Gamma_n) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OB}\| = n \Leftrightarrow |z^2| = n \\ C \in (\Gamma_n) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{OC}\| = n \Leftrightarrow |z^3| = n \; (1) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow n^3 = n \Rightarrow n(n-1)(n+1) = 0 \Rightarrow n = 0 \; ou \; n = 1$

Conclusion : A, B et C ne peuvent pas appartenir à un même cercle centré autre que les cercles de rayon 0 et 1

4) On veut que le triangle ABC soit rectangle en C.

Montrons que A doit appartenir au cercle Γ de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de points à préciser

ABC est rectangle en C si et seulement si $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in i\mathbb{R}^*$ or

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{z^2(1-z)}{z(1-z)(1+z)}$$

Donc $\forall z \neq \{-1; 0; 1\}, \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{z}{z+1} = \frac{x+iy}{x+1+iy} = \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2} + i\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$

Donc $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Conclusion :

A doit appartenir au cercle Γ de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points d'affixes -1 et 0.

5) Partie G de $\mathcal{P}$ pour que $z_C \in \mathbb{R}_+^*$

On a : $z_C = z^3 = (x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Donc $z_C \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \; ou \; 3x^2 - y^2 = 0 \\ x^3 - 3xy^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = 0 \end{cases} ou \begin{cases} x < 0 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases}$

www.tousleconcours.info

Conclusion :

A doit appartenir à la partie G de $\mathcal{P}$ définie par

$$\boxed{G = \{\boldsymbol{A(z = x + iy)} \in \boldsymbol{\mathcal{P}\ avec}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2/(\boldsymbol{x} > 0\ et\ y = 0)\ \boldsymbol{ou}\ (\boldsymbol{x} < 0\ et\ \boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{3x^2})\}}$$

6) Lieu I des points A pour lequel le triangle ABC est isocèle

ABC isocèle en A si et seulement si $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \Leftrightarrow |z(z-1)| = |z(z-1)(z+1)|$$

$$\text{Or } |z+1| = 1 \Leftrightarrow (\boldsymbol{x+1})^2 + \boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{1}$$

ABC isocèle en B si et seulement si $\|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \Leftrightarrow |z_A - z_B| = |z_C - z_B| \Leftrightarrow |z(z-1)| = |z^2(z-1)|$$

$$\text{Or } |z| = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{1}$$

Le cas ABC isocèle en C est une conséquence des deux précédents et n'a pas besoin d'être étudié.

Conclusion :

$$I = \{\boldsymbol{A(z = x + iy)} \in \boldsymbol{\mathcal{P}\ avec}\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2/(\boldsymbol{x+1})^2 + \boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{1}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2} = \boldsymbol{1}\} = C\left(\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, 1\right) \cup C\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, 1\right)$$

7) Forme exponentielle des points éventuels A tels que ABC soit équilatéral

ABC est équilatéral si et seulement si

$$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{z^2(z-1)}{z(1-z)} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow -z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} z = e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \boxed{\boldsymbol{z_A} \in \left\{\boldsymbol{e^{i\frac{4\pi}{3}}}; \boldsymbol{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\right\}}$$

Exercice 3 : Majorations

$f(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

1) Montrons que pour tout x, y de $\mathbb{R}$, $|\mathbf{f(x) - f(y)}| \leq |\mathbf{x - y}|$

On a : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow |f'(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1 \Rightarrow \forall\, x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$

2) Montrons que pour tout x, y de $\mathbb{R}$: $|\mathbf{G(x) - G(y)}| \leq \mathbf{M|x - y|}$

$$|g(x)| \leq M \Rightarrow -M \leq g(x) \leq M \Rightarrow -M(y-x) \leq G(y) - G(x) \leq M(y-x)$$

$$\Rightarrow |G(y) - G(x)| \leq M|y - x| \Rightarrow |G(x) - G(y)| \leq M|x - y|$$

3) Montrons que la somme de deux éléments de P est dans P

Soient k_1 et k_2, deux éléments de P, on a :

$$|(k_1 + k_2)(x) - (k_1 + k_2)(y)| \leq |k_1(x) - k_1(y)| + |k_2(x) - k_2(y)| \leq (\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2})|x - y|$$

Donc $k_1 + k_2 \in$ P

4) Montrons que la composée de deux éléments de P est dans P

Soient k_1 et k_2, deux éléments de P, on a :

$$\left|k_1(k_2(x)) - k_1(k_2(y))\right| \leq \lambda_{k_1}|k_2(x) - k_2(y)| \leq \lambda_{k_1} \cdot \lambda_{k_2}|x - y|$$

Donc $\boldsymbol{k_1 \circ k_2} \in \boldsymbol{P}$

$$\text{Soit } \varphi: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \pi + \frac{1}{3}\sin(x) \end{cases} \text{ et } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \begin{cases} u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \varphi(u_{n-1}) \end{cases}$$

5) Montrons que pour tout *x, y* réels, $|\boldsymbol{\varphi(x) - \varphi(y)}| \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}|\boldsymbol{x - y}|$

On a : $\varphi'(x) = 1/3\ \cos(x) \Rightarrow |\varphi'(x)\ | \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, |\boldsymbol{\varphi(x) - \varphi(y)}| \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}|\boldsymbol{x - y}|$

Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \pi| \leq \frac{1}{3^n}(u_0 - \pi)$

www.toutesconcours.info

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, il vient : $\left|\varphi(u_n)-\varphi(\pi)\right| \leq \frac{1}{3}\left|u_n-\pi\right|$

Ce qui nous donne par multiplications successives membre à membre : $|u_n-\pi| \leq \frac{1}{3^n}(u_0-\pi)$

6)

On a : $\theta(x)=e^{-x^2} \Rightarrow \theta'(x)=-2xe^{-x^2}<0\ \forall x>0$

La fonction θ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \geq 0, \theta(x)=\theta(-x) \leq \theta(0)=1 \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) \leq 1$ il s'en suit $\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) \leq 1 \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}$: $|\Phi(x)-\Phi(y)| \leq |x-y|$
d'où $\Phi \in P$

7) Montrons que si $x \geq 1$ alors $\int_1^x \left(e^{-t^2}\right)dt \leq \int_1^x (e^{-t})dt$

Pour $1 \leq t \leq x$, ona $t \leq t^2 \Rightarrow -t^2 \leq -t \Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t} \Rightarrow \int_1^x (e^{-t^2})dt \leq \int_1^x (e^{-t})dt$

Déduction :

$\Phi(x)=\int_0^x (e^{-t^2})dt=\int_0^1 (e^{-t^2})dt+\int_1^x (e^{-t^2})dt \Rightarrow$

$\int_0^1 (e^{-t^2})dt \leq \Phi(x) \leq \int_0^1 (e^{-t^2})dt+\int_1^x (e^{-t})dt$

Or

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x (e^{-t})dt=e^{-1} \Rightarrow k \leq \lim_{x\to+\infty}\Phi(x) \leq k+e^{-1} \text{ d'où } \Phi \text{ est convergente } c.q.f.d.$$

Exercice 4. Etude de fonction

1) Montrons que la fonction x ↦ tanx admet une application réciproque notée x ↦ Arctanx bijective sur ℝ

La fonction $x \mapsto tanx$ est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et on a:

$(tanx)'=1+(tanx)^2>0$ de plus, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} tanx=-\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tanx=+\infty$

Ainsi, la fonction $x \mapsto tanx$ est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et par suite elle admet un e application réciproque notée $x \mapsto Arctanx$ bijective sur $\mathbb{R}$

2) Justifions que $Arctanx$ est dérivable sur ℝ et calculons $(Arctanx)'$

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, (tanx)'=1+(tanx)^2 \neq 0$ donc $Arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, Arctan\,'x=\frac{1}{\tan'(\tan^{-1}x)}=\frac{1}{1+(\tan(\tan^{-1}x))^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\boldsymbol{Arctan'x=\frac{1}{1+x^2}}$$

3) Déterminons un prolongement par continuité en O de la fonction φ définie par

$$\boldsymbol{\varphi(x)=\frac{\text{Arctan}x}{x}}$$

Nous avons $D_\varphi=\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x\to0}\varphi(x)=1$. Ainsi, un prolongement par continuité de φ en $x=0$ est la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases}\Phi(x)=\varphi(x), & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ \Phi(0)=1 & \end{cases}$

4) Calcul de $Arctan''(0)$ et $Arctan'''(0)$

La fonction $x \mapsto Arctan\,'x=\frac{1}{1+x^2}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, Arctan\,''x=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et $Arctan\,'''x=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$ d'où

www.toutlecongoursinfo

$$\boxed{Arctan''(0) = 0 \text{ et } Arctan'''(0) = -2}$$

5) Pour $x > 0$, montrons que $0 \leq x - Arctan\, x \leq \frac{x^3}{3}$

- D'après **4)**, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $Arctan\,''x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$. Ainsi, la courbe de la fonction $Arctan$ est située en dessous de sa tangente en tout point de $\mathbb{R}_+^*$. La tangente en 0 a pour équation : $y = x$ d'où $Arctanx \leq x\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ soit $\boldsymbol{x - Arctanx \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*}(1)$
- Considérons la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\mathrm{F(x) = x - Arctanx - \frac{x^3}{3}}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et on a : $\mathrm{F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} - x^2 = \frac{-x^4}{1+x^2} < 0}$ donc F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\mathrm{\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0}$ et $\mathrm{\lim_{x\to +\infty} F(x) = -\infty \Rightarrow, F(x) \leq 0 \Rightarrow x - Arctanx - \frac{x^3}{3} \leq 0 \Rightarrow x - Arctanx \leq \frac{x^3}{3} \forall x \in \mathbb{R}_+^*}(2)$

$$\boldsymbol{(1) \text{ et } (2)} \Rightarrow \forall x > 0, 0 \leq x - Arctan\, x \leq \frac{x^3}{3}$$

On pose, pour $x > 0$: $1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{t - Arctan\, t}{t}\right) dt$

6) Montrons que $0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}$

D'après la question précédente, $\forall t > 0, 0 \leq \frac{t - Arctan\, t}{t} \leq \frac{t^2}{3} \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{t - Arctan\, t}{t}\right) dt \leq \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{t^2}{3}\right) dt \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9}}$$

7) Déterminons un prolongement par continuité à droite de 0 de la fonction f

$$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[\ et$$

$$0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{9} \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{9} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Ainsi, un prolongement par continuité à droite en 0 de la fonction *f* est la fonction f_1 définie par :

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x),\ \forall x > 0 \\ f_1(0) = 1 \end{cases}$$

Pente de la demi tangente à la courbe représentative de *f* en ce point

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f\,(x) - 1}{x} = 0 \text{ car d'après 6)}, -\frac{x}{9} \leq \frac{f\,(x) - 1}{x} \leq 0$$

Ainsi, la pente de la demi-tangente à la courbe représentative de f en ce point est 0

8) Montrons que si $x \geq 1$ alors, $\int_1^x \frac{Arctant}{t} dt \leq \frac{\pi}{2}\ln x$

On a : $t \in [1, x], Arctant \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_1^x \frac{Arctant}{t} dt \leq \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{1}{t} dt = \frac{\pi}{2}\ln x \Rightarrow$

$$\int_1^x \frac{Arctant}{t} dt \leq \frac{\pi}{2}\ln x$$

9) Montrons que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Nous avons

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - Arctant}{t} dt = 1 - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t - Arctant}{t} dt - \frac{1}{x}\int_1^x \frac{t - Arctant}{t} dt$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t - Arctant}{t} dt + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\int_1^x \frac{Arctant}{t} dt$$

Or $= \lim_{x\to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{t - Arctant}{t} dt + \frac{1}{x}\right) = 0$

www.touslesconcours.info

on peut donc déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_1^x \frac{Arctant}{t}dt\right)$

Par ailleurs,

$$0 \le \frac{1}{x}\int_1^x \frac{Arctant}{t}dt \le \frac{\pi}{2}\frac{\ln x}{x} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{0}}$$

10) On pose $g(x) = x^2 f'(x)$ pour $x>0$. Montrons que $g(x) = Arctanx - \int_0^x \frac{Arctant}{t}dt$

$$\forall x > 0, f(x) = 1 - \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{t - Arctan\ t}{t}\right)dt$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(\frac{t - Arctan\ t}{t}\right)dt - \frac{1}{x}\left(\frac{x - Arctan\ x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x \left(1 - \frac{Arctan\ t}{t}\right)dt - x + Arctanx\right) = \boldsymbol{\frac{1}{x^2}\left(-\int_0^x \left(\frac{Arctan\ t}{t}\right)dt + Arctanx\right)}\ c.q.f.d.$$

11) On pose $h(x) = x \cdot g'(x)$, calcul de $h'(x)$

$$h'(x) = g'(x) + x \cdot g''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{\text{Arctan}x}{x}\right) + x\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2} - \frac{x - (1+x^2)\text{Arctan}x}{x^2(1+x^2)}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\boldsymbol{h'(x) = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

12) Etude des variations de h et g sur $\mathbb{R}_+^*$

- Variations de h

$$h(x) = \frac{x}{1+x^2} - Arctan\ x$$

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = 0;\ \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\frac{\pi}{2};\ h'(x) = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} < 0$$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	‖	-
$h(x)$	‖ 0	↘ $-\frac{\pi}{2}$

- Variations de g

$g'(x) = \frac{h(x)}{x}$ or $h(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ par suite, g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, $\lim_{x\to0^+} g(x) = 0$ donc $g(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$

- Variations de f

www.tousleconcours.info

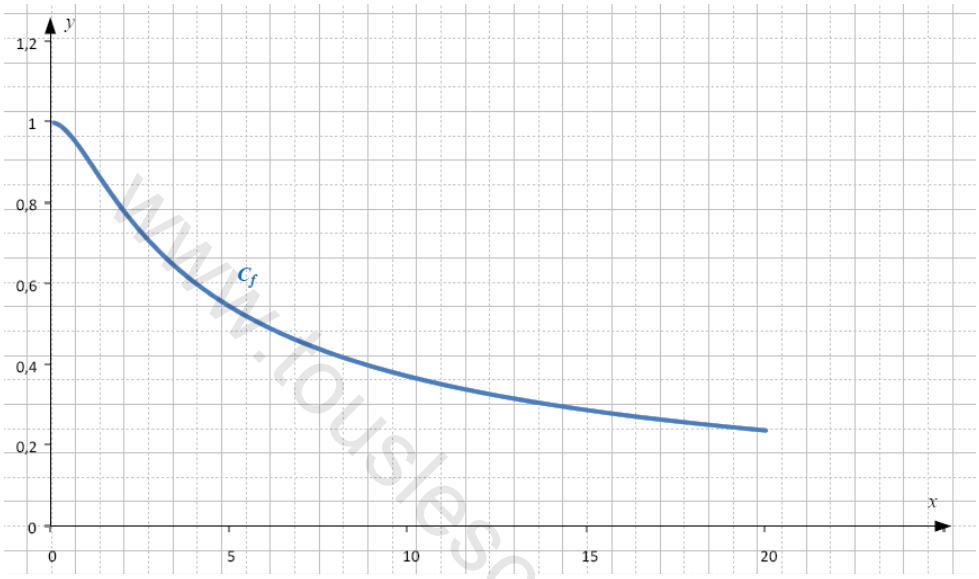
$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ et $g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ *sur* $]0; +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

d'où le tableau de variation suivant

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1 ↘	0

Allure de C_f



www.tousleconcours.info

Exercice 5 : Partage équitable

On donne : $\mathcal{C}_1(\Omega_1, 1\text{cm})$, $\Omega_1(-2; 10)$; $\mathcal{C}_2(\Omega_2, 2\text{cm})$, $\Omega_2(4; 10)$; $\mathcal{C}_3(\Omega_3, 8\text{cm})$, $\Omega_3(0; 10)$

Δ désigne l'axe des abscisses

1) Déterminons $\Gamma_1 = \{\mathbf{M} \in \mathcal{P} / \, d(\mathbf{M}; \mathcal{C}_1) = d(\mathbf{M}; \Delta)\}$

Γ_1 est une parabole ; déterminons son équation :

Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$, $d(M; \mathcal{C}_1) = M\Omega_1 - R_1 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} - 1$ et $d(M; \Delta) = |y|$

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} - 1 = |y| \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-10)^2 = (y+1)^2 \text{ car } y > 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{(x+2)^2 = 22\left(y - \frac{9}{2}\right)}$$

2) Déterminons $\Gamma_2 = \{\mathbf{M} \in \mathcal{P} / \, d(\mathbf{M}; \mathcal{C}_1) = d(\mathbf{M}; \mathcal{C}_2)\}$

Γ_1 est une hyperbole ; déterminons son équation :

Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$, $d(M; \mathcal{C}_1) = M\Omega_1 - R_1 = \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} - 1$ et

$$d(M; \mathcal{C}_2) = M\Omega_2 - R_2 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-10)^2} - 2$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-10)^2} - 1 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-10)^2} - 2$$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2}+1=\sqrt{(x-4)^2+(y-10)^2}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-10)^2+2\sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2}+1=(x-4)^2+(y-10)^2$

$\Leftrightarrow 12(x-1)+1=-2\sqrt{(x+2)^2+(y-10)^2}$

$\Leftrightarrow (12(x-1)+1)^2=4((x+2)^2+(y-10)^2)$

$\Leftrightarrow (12x-11)^2=((2x+4)^2+(2y-20)^2)$

$\Leftrightarrow (12x-11+2x+4)(12x-11-2x-4)=(2y-20)^2$

$\Leftrightarrow (14x-7)(10x-15)=(2y-20)^2$

$\Leftrightarrow 35(2x-1)(2x-3)=4(y-10)^2$

$\Leftrightarrow 35(4x^2-8x+3)=4(y-10)^2$

$\Leftrightarrow 35\left(x^2-2x+\frac{3}{4}\right)=(y-10)^2$

$\Leftrightarrow 35\left((x-1)^2-\frac{1}{4}\right)=(y-10)^2$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(y-10)^2}{\frac{35}{4}}=1}$$

3) Déterminons $\Gamma_3=\{M\in\mathcal{P}/\ d(M;\mathcal{C}_2)\ =d(M;\mathcal{C}_3)\}$

Γ_3 est une ellipse ; déterminons son équation :

Soit $M(x,y)\in\mathcal{P}$, $d(M;\mathcal{C}_2)=M\Omega_2-R_2=\sqrt{(x+4)^2+(y-10)^2}-2$ et

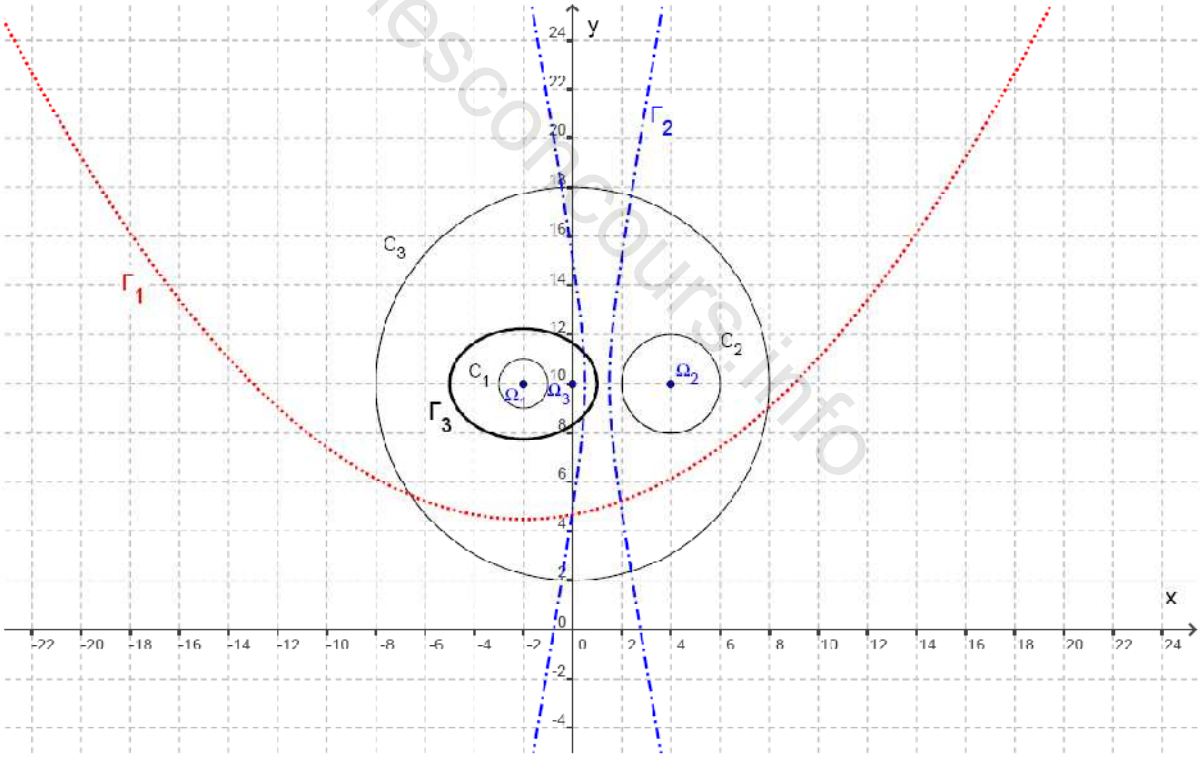
$$d(M;\mathcal{C}_3)=M\Omega_3-R_3=\sqrt{x^2+(y-10)^2}-8$$

$$M\in\Gamma_3\Leftrightarrow\sqrt{(x+4)^2+(y-10)^2}-2=\sqrt{x^2+(y-10)^2}-8$$

On procède comme précédemment et on trouve :

$$\boxed{\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-10)^2}{5}=1}$$

Représentations graphiques



www.touslesconcours.info

www.touslesconcours.info

SUJET N°2

Exercice 1 :

Calcul de la probabilité P de 2 façons différentes.

1ere méthode :

Le nombre de façons de prendre deux boules dans l'urne est : C_{20}^2

Pour tirer deux boules de couleurs différentes, on a : C_4^2 possibilités pour les 2 couleurs (différentes) des boules. à chaque couleur, on a : C_5^1 boules possibles soit $C_5^1 \times C_5^1$ pour les deux couleurs

Donc $$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{C_4^2 \times C_5^1 \times C_5^1}{C_{20}^2} = \frac{15}{19}}}$$

2ème Méthode :

La probabilité d'avoir deux boules de même couleur est : $\boldsymbol{P' = \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{4}{19}}$ et la probabilité cherché est :

$$\boldsymbol{P = 1 - P' = \frac{15}{19}}$$

Exercice 2 :

Distance d entre deux points images des solutions non réelles de $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$ (1)

$z = 1$ est une solution évidente de (1) d'où$z^3 + z^2 + 2z - 4 = (z-1)(z^2 + 2z + 4)$

Les deux solutions non réelles de (1) sont donc les solutions z_1 et $\bar{z}_1$ de $z^2 + 2z + 4 = 0$ (2)

Posons : $z_1 = a + ib$, on a : $d = |z_1 - \bar{z}_1| = 2|\mathrm{Im}(z_1)| = 2|b|$

D'après (2), $\begin{cases} z_1 + \bar{z}_1 = -2 \\ z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = -2 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow |b| = \sqrt{3}$ d'où

$$\boxed{\boldsymbol{d = 2\sqrt{3}}}$$

Exercice 3 :

Centre et foyers de la conique dont une partie est la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan, $M \in \mathcal{C}_f \Rightarrow y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \Rightarrow y^2 = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ ce qui est l'équation d'une hyperbole ; on a $c = \sqrt{(a^2 + b^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ le centre et les foyers sont :

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega\left(\frac{1}{2}; 0\right) ; F\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; F'\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

Exercice 4 :

Etude des variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 + x + 1}$

f est continue et dérivable sur comme composée et produit de telles fonctions

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{4x^2+3x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ d'où le tableau de variations suivant :

www.touslesconcours.info

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Exercice 5 :

Déterminer

$\Omega = \{M \in \mathcal{P} \ / \ (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}) \cdot (3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 0\}$

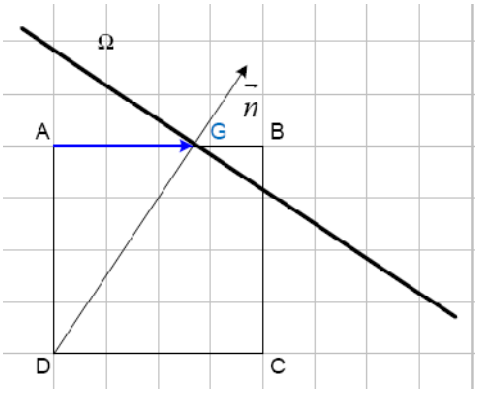
Soit $G = bar\{(B;3),(C;-1),(D;1)\}$ On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et

$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MD}) \cdot (3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}) \cdot (3\overrightarrow{MG}) \Rightarrow$

Ainsi, $M \in \Omega \Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}) \cdot (3\overrightarrow{MG}) = 0$

Ω est la droite passant par G et de vecteur normal

$\vec{n} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD}$



Exercice 6 :

$\vec{X} = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ en fonction de MG^2 et a, b, c

On a : $\vec{X} = 2\left(\vec{MG} + \vec{GB}\right)\left(\vec{MG} + \vec{GB}'\right) + \left(\vec{MG} + \vec{GA}\right)\left(\vec{MG} + \vec{GC}\right) = \Rightarrow \vec{X} =$

$$3MG^2 + \vec{MG}\left(2\vec{GB}' + \vec{GB}\right) + 2\vec{GB}\vec{GB}' + GB^2 + \vec{GB}\left(\vec{BC} + \vec{BA}\right) + \vec{BA}\vec{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = 3MG^2 + \vec{GB}\left(\vec{BC} + \vec{BA}\right) + \vec{BA}\vec{BC} \text{ car } \vec{BA} + \vec{BC} = -3\vec{GB}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = 3MG^2 - 3GB^2 + \vec{BA}\vec{BC} \text{ car } \vec{BA} + \vec{BC} = -3\vec{GB}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = 3MG^2 - \frac{1}{3}\left(BA^2 + BC^2 - \vec{BC}.\vec{BA}\right) \text{ car } \vec{BA} + \vec{BC} = -3\vec{GB}$$

$$\Rightarrow \vec{X} = 3MG^2 - \frac{1}{3}\left(BA^2 + BC^2 + \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right)\right) = 3MG^2 - \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Conclusion : $\Rightarrow \vec{X} = 3MG^2 - \frac{1}{6}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Exercice 7 :

Probabilité la plus grande

$P(2A) = 1 - P'(2A)$ où $P'(2A)$ est la probabilité de n'avoir aucune prise avec 2 cannes de types A

$P(2A) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

www.touslescours.info

$P(3B) = 1 - P'(3B) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{27}$

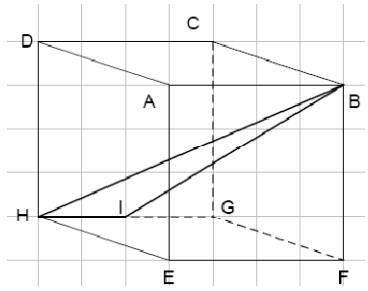
$P(4C) = 1 - P'(4C) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{37}{64}$

Ainsi, $\boldsymbol{P(2A)} > P(3\boldsymbol{B}) > P(4\boldsymbol{C})$. la probabilité la plus grande est donc $P(2A)$

Exercice 8 :

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = -\frac{1}{2}$$

Exercice 9 :



Calcul de $A(HIB)$

Considérons le repère$\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a : $\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et

$\overrightarrow{HB}(1; -1; -1)$ $\mathcal{A}(HIB) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{HI} \wedge \overrightarrow{HB}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\| =$

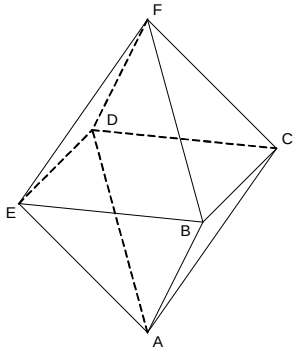
$\frac{\sqrt{2}}{4} u.a$ avec $u.a = 16cm^2$ soit $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}(HIB) = 4\sqrt{2}cm^2}}$

Calcul de $\mathcal{V}(HIBF)$

$\mathcal{V}(HIBF) = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{HI} \wedge \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{HF}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{12} u.v$ avec $u.v = 64cm^3$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{V}(HIBF) = \frac{16}{3} cm^3}}$$

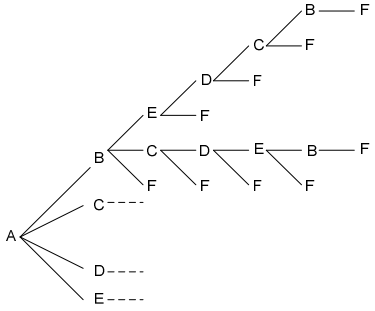
Exercice 10 :



En supposant qu'au début notre fourmi se trouve au sommet A .le sommet qui lui est diamétralement opposé est F.

Chemins possibles pour relier A et F :

L'arbre suivant liste les chemins menant de A à F



en passant par B tout comme en passant par C, D et E, on a 9 chemins possibles soit ***N=36* cas *possibles***

Les chemins effectuables en 3 déplacements sont : ABCF, ABEF, ACDF, ACBF, ADCF, ADEF, AEBF et AEDF soit ***n=8 cas* favorables *d'où :***

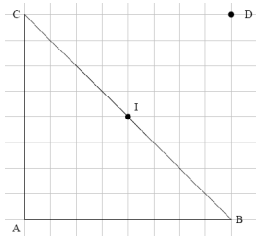
$$\boxed{\boldsymbol{P = \frac{2}{9}}}$$

www.tousleconcours.info

Exercice 11 :

On remarque que cette composition de transformations donne la symétrie de centre I.
Nous en voulons pour preuve le fait que, en l'appelant f, on a : $f(A) = D$; $f(B) = C$; $f(C) = B$; $f(D) = A$ et $f(I) = I$

$$\boxed{\boldsymbol{r\left(C,\frac{\pi}{2}\right) o t_{\overrightarrow{BC}} o r\left(B,\frac{\pi}{2}\right) = S_I}}$$



Exercice 12 :

Soit P cette probabilité d'absence : $\boldsymbol{P = C_{40}^2(0,02)^2(1-0,02)^{38} \simeq 0,1448}$

Exercice 13 :

$$\boldsymbol{A\left(\frac{1}{2}+i\right); B\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)+\frac{3}{2}i\right); C\left(\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+2i\right)}$$

Calcul de la mesure principale de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$$mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = Arg\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = Arg\frac{\sqrt{3}+i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} = \pi + 2Arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$$

Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{mes(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{2\pi}{3}}}$

Exercice 14 :

Nombre de diviseurs de 10800

On sait que : $10800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \Rightarrow\Rightarrow$ le nombre de diviseurs de 10800 est $(3+1)(2+1)(1+4) = 60$

Conclusion : le nombre 10800 a donc 60 diviseurs dans $\mathbb{N}$

Exercice 15 :

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{4}{3}u_n+4}{2u_n+6} = \frac{2}{3} \Rightarrow (v_n)$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 3$

Déduction de

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = 2\sum_{k=0}^{n-1} u_k + 6n = 3\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 9\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - 3n}}$$

Exercice 16 :

Déterminons $(E) = \left\{M \in \mathcal{E} \,/\, \frac{MA}{MB} = 3\right\}$

Soit $M \in \mathcal{E}$, $M \in (E) \Leftrightarrow MA^2 = 9MB^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right) = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ} = 0 \text{ où } I = bar\{(A;1),(B;-3)\} \text{ et } J = bar\{(A;1),(B;3)\}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

Donc (E) est la **sphère de diamètre** $[\boldsymbol{IJ}]$

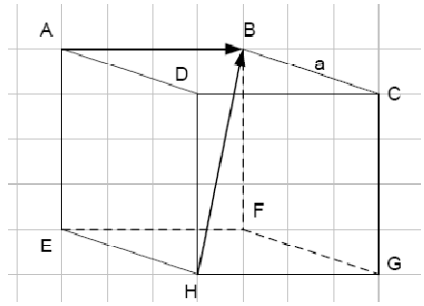
www.touslesconcours.info

Exercice 17 :

Calcul de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}$

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)=AB^2\Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}=a^2}}$$



Exercice 18 :

Résolution dans $\mathbb{R}$ de : (E) : $e^{2t}-e^{3+t}-e^{t-1}+e^2\geq 0$

$e^{2t}-e^{3+t}-e^{t-1}+e^2=e^{2t}-\left(e^3+\frac{1}{e}\right)e^t+e^2$ le discriminant de cette équation du second degré en $x=e^t$ vaut $\Delta=\left(e^3+\frac{1}{e}\right)^2-4e^2=\left(\frac{e^4-1}{e}\right)^2$ donc $(E)\Leftrightarrow(e^t-e^3)(e^t-e^{-1})\geq 0$ d'où

$$\boxed{\boldsymbol{S=]-\infty\,;-1]\cup[3\,;\,+\infty[}}$$

Exercice 19 :

Limite en 1 de $f(x)=\frac{\ln(x^2-3x+3)}{x-1}$

Soit $g:x\mapsto\ln(x^2-3x+3)$;

$$g(1)=0\Rightarrow\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)\text{ avec }g'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x+3}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{x\to1}f(x)=-1}}$$

Exercice 20

Calcul de $I=\int_2^3\frac{t}{(t^2-1)^2}dt$

$$I=\int_2^3\frac{t}{(t^2-1)^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{(t^2-1)'}{(t^2-1)^2}dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t^2-1}\right]_2^3=\frac{5}{48}$$

Donc :

$$\boxed{\boldsymbol{I=\frac{5}{48}}}$$

www.touslescours.info