CORRECTION DE MATHEMATIQUES 2002

Exercice 1

1.

a) La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur et $g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x}$

Posons $\forall x \in]0;+\infty[, k(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$, on a alors

$$g'(x) = \frac{k(x)}{x} = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

b) Le trinôme $3x^2+3x+2$ admet pour discriminant $\Delta = -15 < 0$, il est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$ et comme $\frac{1}{x} > 0 \ \ \forall x \in]0;+\infty[$, il s'en suit que $g'(x)$ est du signe de $(x-1)$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0;1[$ et strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Le minimum de g est donc atteint en 1 et vaut $g(1) = 1$. Par suite, $\boldsymbol{g(x)}$ **est strictement positive sur** $]0;+\infty[$.

2.

Pour tout $x > 0, f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 + x^2 + \frac{\ln x}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Pour tout $x > 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

f' est du signe de g donc strictement positive sur $]0;+\infty[$. Son tableau de variation est :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice2:

1. $\forall\, n > 0,\ \ I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$

a) $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x}dx$

Par intégration par partie, on a :

$$I_1 = [(1-x)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{I_1 = \frac{1}{e}}}$$

b) Pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout entier naturel non nul on a :

$0 \leq (1-x)^n \leq 1$ car $0 \leq (1-x) \leq 1$, et $0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$ car $e^{-x} > 0$

Il vient par monotonie de l'intégrale :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$$

Il s'ensuit que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

c) En intégrant par parties on a

$$\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}dx = [(1-x)^{n+1}(-e^{-x})]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}dx$$

$$= 1-(n+1)(n!)I_n \Rightarrow \boxed{I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n}$$

2. $a_1 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

a) La démonstration par récurrence n'est plus un secret : $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

b) Nous avons $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ D'après 1-b donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{e}}$

EXERCICE 3

$$I = \int_0^\pi \cos^4 x\, dx \quad et \quad J = \int_0^\pi \sin^4 x\, dx$$

1. On a : $\cos x\,(\cos x - \cos x \sin^2 x) = \cos^2 x\,(1-\sin^2 x) = \cos^4 x$ par suite,

$$I = \int_0^\pi \cos x\,(\cos x - \cos x \sin^2 x)dx$$

2. Par intégration par parties on a

$$I = \left[\cos x\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^4 x\right)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \int_0^\pi \sin^2 x\, dx - \frac{1}{3}J}$$

Car sin0=sinπ=0

3. On a

$$I = \int_0^\pi \sin x\,(\sin x - \sin x \cos^2 x)dx \quad \text{voir question 1}$$

Il vient par intégration par parties

$$I = \left[\sin x\left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\cos^2 x + \frac{1}{3}\cos^4 x\right)dx = \int_0^\pi \cos^2 x\, dx - \frac{1}{3}I$$

Car sin0=sinπ=0

4. On en déduit $I + J = \int_0^\pi (\cos^2 x + \sin^2 x)dx - \frac{1}{3}(I+J) \Rightarrow \frac{4}{3}(I+J) = \int_0^\pi dx = \pi$

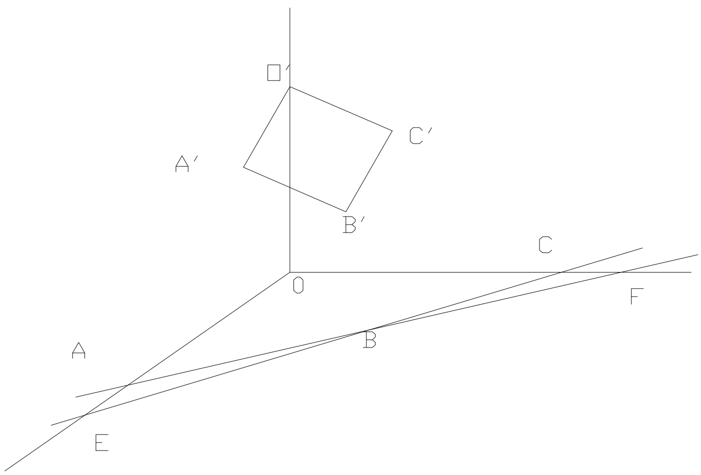
$\Rightarrow I + J = \frac{3\pi}{4}$

Par ailleurs, $J - I = \int_0^\pi (\cos^2 x - \sin^2 x)dx + \frac{1}{3}(J-I) \Rightarrow \frac{2}{3}(J-I) = 0$

$\Rightarrow J - I = 0$. On a donc finalement :

$$\boxed{I = J = \frac{3\pi}{8}}$$

EXERCICE 4



1. E∈(OA) car OE=6i et OA=4i ; E∈(BC) car EB= 4i+4j et EC= -6i+6j ; soit EB= 3/2EC. Les droites (BC) et (OA) n'étant pas confondues (EB n'étant pas multiple de i), on en déduit que E est leur point d'intersection.

2-a On a SE =(6;0;-4) et EF=(-6;8;0) ; il vient SEΛEF=(32;24;48).Ce vecteur est un vecteur normal au plan (SEF) et soit M(x ;y ;z) un point de (SEF) on en déduit EM(SE∧EF) = 0 c'est à dire 32(x - 6) + 24y + 48z = 0 d'où l'équation cartésienne de (SEF) : 4x +3y +6z –24 = 0

b On a OA' = ¼ OA + ¾ OS et donc A'=(1;0;3)

c Ce plan a une équation de la forme 4x + 3y + 6z +d = 0 . Comme il passe par A' 4+18+d = 0 c'est à dire d = -22

3- a Le point O' a des coordonnées de la forme (0 ;0 ;k) , pour déterminer k il suffit de remplacer x et y par 0 dans l'équation de (P) pour trouver k =11/3

b Le point C' de (P) appartient aussi à la droite (SC) dont un vecteur directeur est SC =(0 ;6 ;-4). Une représentation paramétrique de la droite (SC) est x=0 ; y = 6+6λ ; z = -4λ (λ∈ R). Comme C'∈(SC) et C'∈(P) il vient que les coordonnées de C'vérifient les équations de (SC) (λ fixé) et l'équation de (P). En résolvant le système d'équations ainsi obtenu on obtient C'=(0 ;2 ;8/3).

c La droite (SB) passe par B = (2 ;4 ;0) et admet pour vecteur directeur SB =(2 ;4 ;4), une représentation paramétrique de cette droite est donc x=2+2λ ; y = 4+4λ ; z = -4λ Les coordonnées de du point B' sont solutions du système :4x + 3y + 6z –22 = 0 , x=2+2λ ; y = 4+4λ ; z = -4λ . La résolution conduit à λ = -1/2 et B'=(1 ;2 ;2) .

4- Le milieu de [O'B'] et celui de [A'C'] coïncident (point de coordonnées (1/2 ; 1 ;17/6))

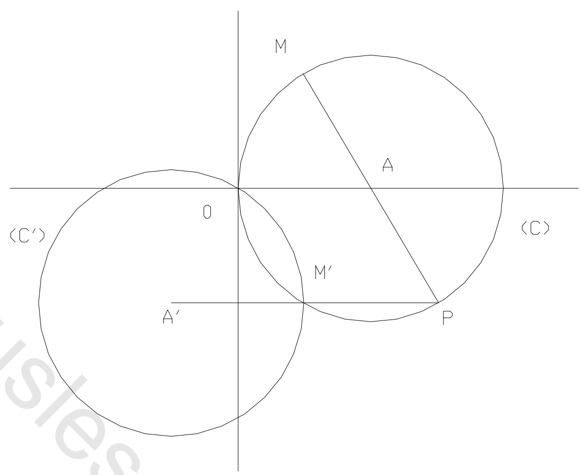
O'A'B'C' est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu donc un parallélogramme.

EXERCICE 5

1. Le point M a pour affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$ d'où $|z - z_A| = |e^{2i\theta}| =$ et M appartient donc au cercle de centre A et de rayon 1.

2. On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \arg\frac{z_M - z_A}{z_B - z_A} = \arg\frac{e^{2i\theta}}{1} = 2\theta[2\pi]$. On en déduit que l'ensemble E décrit par M lorsque θ varie dans $]0, \pi[$ est le cercle (C) de centre A et de rayon 1 privé de B.

3. L'affixe z' de M' image de M est donnée par : $z' = e^{-2i\theta} \cdot z = e^{-2i\theta} + 1 = \bar{z}$.
Puisque M décrit (C) et que M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses il s'ensuit que M' appartient à (C) , car (C) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



4.

a) Une rotation est une isométrie nous en déduisons que l'image du cercle (C) de centre A et de rayon 1 est le cercle (C') de centre A' et de rayon 1.

b) Nous avons $\overline{AM} = \overline{AO}$ et $\overline{OM} = \left|1 + e^{2i\frac{\pi}{3}}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1 = \overline{AM} = \overline{AO}$
Le triangle AMO est équilatéral.

c) On a $r(O) = O$ donc $O \in (C')$ le point M' a pour affixe $z' = e^{-2i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow |z'| = |z| = 1$ et $|z'-1| = |z-1|$. Par conséquent, M'$\in$(C). les cercles (C) et (C') se coupent en O et en M'.

d) P étant le symétrique de M par rapport a A il vient $z_P - 1 = e^{i\pi}(z-1) \Rightarrow z_P = -z + 2$ A' ayant pour affixe $e^{-2i\frac{\pi}{3}}$, le milieu I de $[A'P]$ a pour affixe :
$Z_I = \frac{-z+2+e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, le milieu de $[A'P]$ est le point M'.

Exercice 6

1- (D1) est la droite passant par A=(3,9,2) et de vecteur directeur $\vec{u}_1 = (1,3,0)$.Le support de la demie droite (D2) passe par B=$\left(\frac{1}{2},4,4\right)$ et est dirigée par $\vec{u}_2 = (2,1,-1)$.

2- Un point d'intersection à (D1) et (au support de) (D2) est associé à une solution du système $\begin{cases} 3+a = 0.5+2b \\ 9+3a = 4+b \\ 2 = 4-b \end{cases}$

Ce qui conduit à b=2 puis a=1.5 ou 4=-1. Le système est donc incompatible et les droites sont non coplanaires (Car elles sont ni sécantes ni parallèles voir vecteur directeur non, proportionnels).

3-a) Le vecteur $\overrightarrow{AS} = (0,5,-1.9)$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}_1$ donc $\left(A,\vec{u}_1 \otimes \overrightarrow{AS}\right)$ est un repère de (P1). $\vec{n}_1 = \vec{u}_1 \wedge \overrightarrow{AS} = (-5.7,1.9,-5)$ est un vecteur normal à (P1) comme A$\in$(P1) on en déduit qu'une équation cartésienne de (P1) est
-5.7x+1.9y-5z+10=0
Pour trouver un point d'intersection entre (P1) et (D2) on cherche à résoudre le système formé de cette équation cartésienne et des équation s paramétriques de (D2) .On trouve une solution correspondante à b=$\frac{-7}{6}$; il s'agit du point M2=$\left(-\frac{11}{6},\frac{17}{6},\frac{31}{6}\right)$ qui est donc à l'intersection de (P1) et (D2).

b) Même raisonnement qu'à la question précédente : un vecteur normal à (P2) est $\vec{n}_2 = \vec{u}_2 \wedge \overrightarrow{BS} = (-3.9,5.3,-2.5)$.On en déduit une équation cartésienne de (P2) , en utilisant le fait que B est sur ce plan. On obtient :
-3.9x+5.3y-2.5z-9.25=0
La résolution du système ainsi formé des équations de (P2) et (D1) donne a=$-\frac{29}{16}$; Le point d'intersection de (P2) et (D1) est le point M1=$\left(\frac{19}{16},\frac{57}{16},2\right)$

c) La droite (D1) coupe (P2) en M1 et elle est incluse dans (P1) , donc M1 est un point commun à (P1) et à (P2) .Ces plans ont donc trois points en commun : S,M1,M2. Or ils ne sont pas confondus, sinon (D1) et (D2) seraient coplanaires. Donc ils sont sécants et leur droite d'intersection (R) contient S,M1,M2.Cette droite est sécante avec chacune des droites (D1) et (D2) et l'affirmation du technicien est vraie.

QUESTIONNAIRE :

	A	B	C	D

1	Faux	Vrai	Faux	Vrai
2	Faux	Vrai	Vrai	Faux
3	Vrai	Faux	Faux	Vrai
4	Faux	Faux	Faux	Faux
5	Vrai	Faux	Faux	Faux
6	Faux	Faux	Faux	Vrai
7	Vrai	Vrai	Faux	Vrai
8	Faux	Faux	Vrai	Faux
9	Vrai	Vrai	Faux	Faux
10	Vrai	Vrai	Faux	Faux
11	Vrai	Faux	Faux	Vrai
12	Faux	Vrai	Faux	Vrai
13	Faux	Vrai	Faux	Vrai
14	Faux	Faux	Faux	Faux
15	Faux	Faux	Faux	Faux
16	Vrai	Faux	Vrai	Vrai