

CORRECTION DE MATHEMATIQUES 2003

www.touslesconcours.info

Exercice 1 :

1. a) Etude des variations de f

La fonction f est dérivable sur $D_f =]0, +\infty[$ et on a $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}; f'(x) \text{ est donc strictement positive pour tout } x \in]0, +\infty[$$

Conclusion : f est croissante sur son domaine de définition $]0, +\infty[$

- b) Dédution de l'inégalité : $\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

On sait d'après 1.a que f est croissante sur $]0, +\infty[$ (1)

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = 0 \quad (3)$$

Ainsi (1), (2) et (3) $\Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[, f(x) \in]-\infty, 0[$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \in]-\infty, 0[$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- c) Démontrons que $\ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Posons $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$, $\forall x \in]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2} \leq 0, \text{ donc } g \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[\quad (1)$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ et (2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad (3)$$

Ainsi (1), (2) et (3) $\Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[, g(x) \in]0, +\infty[$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) \in]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \ln(n+1)$

Ecrivons l'inégalité établie en 1.b en faisant varier k de 1 à n

$$\ln(2) - \ln(1) \leq 1$$

$$\ln(3) - \ln(2) \leq 1/2$$

$\vdots$

$$\ln(n) - \ln(n-1) \leq 1/(n-1)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq 1/n$$

En faisant la somme de ces inégalités membre à membre il vient $\ln(n+1) \leq 1 + 1/2 + \dots + 1/(n-1) + 1/n$

Donc $u_n \geq \ln(n+1)$

Or on a $\lim \ln(n+1) = +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$

Conclusion

u_n est divergente.

3. a) Etude du sens de variation de (v_n) :

$$\text{Pour tout } n \geq 1, v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \ln(n+1) - u_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n$$

Or d'après la question 1.c, $\ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$ et **la suite (v_n) est décroissante.**

b) Dédution de la convergence de la suite (v_n) .

$$\text{Pour tout } n \geq 1, u_n \geq \ln(n+1) \geq \ln(n) \Rightarrow u_n - \ln n = v_n \geq 0$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge

4. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la suite (w_n) par $w_n = \frac{u_n}{\ln n}$

a) Montrons que pour tout entier $n \geq 2, 1 \leq w_n \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

Pour tout entier $n \geq 2, \ln n \geq \ln 1 = 0$ or $u_n \geq \ln(n+1) \geq \ln(n)$ donc

$$w_n = \frac{u_n}{\ln n} \geq 1, \forall n \geq 2 \quad (1)$$

Ecrivons l'inégalité établie en 1.c en faisant varier k de 1 à n

$$\ln(2) - \ln(1) \leq 1/2$$

$$\ln(3) - \ln(2) \leq 1/3$$

$\vdots$

$$\ln(n) - \ln(n-1) \leq 1/(n)$$

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq 1/(n+1)$$

$$\ln(n+1) \leq u_{n+1} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{u_{n+1}}{\ln(n+1)} \geq 1 + \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{u_n}{\ln(n)} \geq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow w_n \geq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \quad \forall n \geq 2 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \forall n \geq 2, 1 \leq w_n \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

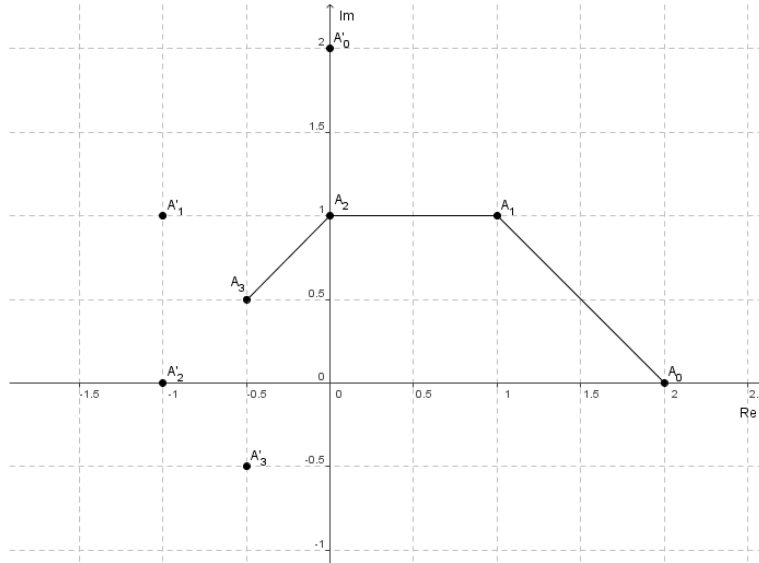
b) Déterminons la limite de la suite (w_n) .

D'après la question précédente, **$\lim w_n = 1$**

Exercice 2 :

1) Déterminons les affixes des points $A_0, A'_0, A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3$ et plaçons les sur une figure.

$$z_0 = 2, z'_0 = 2i, z_1 = 1+i, z'_1 = -1+i, z_2 = i, z'_2 = -1, z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



2) Calculons $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$.

$$\rho_0 = 2, \rho_1 = \sqrt{2}, \rho_2 = 1, \rho_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta_0 = 0[2\pi], \theta_1 = \frac{\pi}{4}[2\pi], \theta_2 = \frac{\pi}{2}[2\pi], \theta_3 = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

3) Expression de z_n en fonction de n :

$$\forall n \geq 1, z_n = \frac{z_{n-1} + iz_{n-1}}{2} = \frac{(1+i)}{2} z_{n-1} \Rightarrow z_n = 2 \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$$

4) Expressions de ρ_n et de θ_n en fonction de n .

$$\begin{aligned} z_n &= 2 \cdot \left(\frac{1+i}{2}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^n \\ &= \frac{2}{(\sqrt{2})^n} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) = \rho_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\rho_n = \frac{2}{(\sqrt{2})^n}, \theta_n = n\frac{\pi}{4}$$

5)

$$\lim \rho_n = 0$$

6) Comparaison des modules et argument de z_n et z_{n+8}

$$\rho_{n+8} = \frac{2}{(\sqrt{2})^{n+8}} = \frac{2}{(\sqrt{2})^n \cdot (\sqrt{2})^8} = \frac{\rho_n}{16}$$

$$\theta_{n+8} = (n+8)\frac{\pi}{4} = \theta_n + 2\pi$$

$$\rho_{n+8} = \frac{\rho_n}{16}, \quad \theta_{n+8} - \theta_n = 2\pi$$

7) Etablissons que $A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n$

On a : $A_n A_{n+1} = \|z_{n+1} - z_n\|$ et $A_{n-1} A_n = \|z_n - z_{n-1}\|$.

Or: $\|z_{n+1} - z_n\| = \left\| \left(\frac{1+i}{2} \right) z_n - \left(\frac{1+i}{2} \right) z_{n-1} \right\| = \left\| \frac{1+i}{2} \right\| \|z_n - z_{n-1}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|z_n - z_{n-1}\|$ d'où

$$\underline{A_n A_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{n-1} A_n}$$

8) De la relation précédente, on déduit $\forall n \in \mathbb{N}, A_n A_{n+1} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} A_0 A_1$ avec $A_0 A_1 =$

$$\|1 + i - 2\| = \sqrt{2} \text{ d'où :}$$

$$A_n A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

La ligne brisée $A_0 A_1 A_2 \cdots A_n$ a pour longueur

$$l_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^k} = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(\sqrt{2})^k} = \sqrt{2} \frac{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \frac{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$l_n = 2 \frac{1 - \frac{1}{(\sqrt{2})^n}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\lim l_n = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$$

Exercice 3

$$1. \quad G_1 = \text{bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, -1)\} \text{ donc } \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$$

$$G_{-1} = \text{bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\} \text{ donc } \overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

2. Montrons que pour tout réel k de l'intervalle $[-1; 1]$, on a : $\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2+1} \overrightarrow{BC}$.

$$\text{On a } \forall k \in [-1; 1], G_k = \text{bar}\{(A, k^2); (B, k); (C, -k)\} \Rightarrow$$

$$(k^2 + 1) \overrightarrow{G_k A} + k \overrightarrow{G_k B} - k \overrightarrow{G_k C} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(k^2 + 1) \overrightarrow{G_k A} + k \overrightarrow{G_k A} + k \overrightarrow{AB} - k \overrightarrow{G_k A} - k \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AG_k} = -\frac{k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}$$

3. Tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$

La fonction f est dérivable sur $[-1; 1]$ comme fonction rationnelle et on a $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) =$

$$\frac{-(x^2+1)+2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} < 1 \text{ la fonction } f \text{ est donc strictement décroissante. On a } f(-1) = \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} \text{ d'où :}$$

x	-1	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$		

4. l'image de f parcourt l'intervalle $[-1/2 ; 1/2]$ lorsque k parcourt $[-1 ; 1]$ donc l'ensemble des points G_k est l'intervalle $[G_1 ; G_{-1}]$

$$5. \text{ On a } \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{MG_{-1}}\|$$

L'ensemble **E** est le plan médiateur de $[G_1 G_{-1}]$.

$$6. \text{ On a } \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|-2\overrightarrow{AI}\| \text{ où } I \text{ est le milieu de } [BC].$$

L'ensemble **F** est la sphère de centre G_1 et de rayon AI .

7.

$$(a) \quad \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G_1} = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_C) = 0 \\ y_{G_1} = y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_C) = 0 \\ z_{G_1} = z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_C) = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{G_1 = O}. \text{ De même, on trouve}$$

$$G_{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

F et E sont sécants si la distance du centre de la sphère F au plan E est inférieure au rayon de F c'est-à-dire si et seulement si $d(G_1, E) < AI$. Nous remarquerons tout d'abord que le milieu de $[G_1 G_{-1}]$ est $A(0; 0; 2)$ et que $I(-1; 2; 3)$.

E étant le plan médiateur de $[G_1 G_{-1}]$, on a $d(G_1, E) = G_1 A = \sqrt{2}$; $AI = \sqrt{6} > d(G_1, E)$.

CQFD.

(b) Soit M un point de ce cercle, le triangle OAM est rectangle en A donc $OM^2 = OA^2 + AM^2$ soit $(\sqrt{6})^2 = 2^2 + AM^2 \Rightarrow R = AM = \sqrt{2}$ rayon du cercle C . Une solution analytique est aussi possible : La sphère E a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Le plan F a pour équation $z = 2$, le cercle C a donc pour équations $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ et $z = 2$ soit encore $x^2 + y^2 = 2$ et $z = 2$ le rayon du cercle C est donc $\sqrt{2}$.

Exercice 4 :

On pose $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x) dx$

$$1. I_0 = \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}$$

2. Calcul de $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin(3x) dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \text{ et } v'(x) = \sin(3x) \\ u'(x) = 1 \text{ et } v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) \end{cases}$ on a alors

$$I_1 = -\frac{1}{3}[x \cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x) dx = \frac{1}{3}[x \cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{9}[\sin(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{9}}$$

3. $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+2} \sin(3x) dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^{n+2} \text{ et } v'(x) = \sin(3x) \\ u'(x) = (n+2)x^{n+1} \text{ et } v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) \end{cases}$ on a alors

$$I_{n+2} = \frac{1}{3}[x^{n+2} \cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{n+2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \cos(3x) dx = -\frac{n+2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \cos(3x) dx$$

On pose maintenant $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \text{ et } v'(x) = \cos(3x) \\ u'(x) = (n+1)x^n \text{ et } v(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) \end{cases}$ on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \cos(3x) dx &= -\frac{1}{3}[x^{n+1} \sin(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{n+1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x) dx \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} + \frac{n+1}{3} I_n \Rightarrow I_{n+2} = -\frac{n+2}{3} \left(-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} + \frac{n+1}{3} I_n\right) \end{aligned}$$

$$I_{n+2} = \frac{n+2}{9} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - \frac{(n+2)(n+1)}{9} I_n$$

4. La relation précédente nous donne avec $n = 1$, $I_3 = \frac{\pi}{108} - \frac{2}{27}$

5.

a) Montrons que la suite (I_n) est monotone.

Pour tout $n \geq 1$,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{n+1} \sin(3x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n (x-1) \sin(3x) dx$$

Or sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ $\sin(3x) \geq 0$; $x^n \geq 0$; $x-1 \leq 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n (x-1) \sin(3x) dx = I_{n+1} - I_n \leq 0$ et la suite (I_n) est décroissante.

b) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$ et $0 \leq x^n \sin(x) \leq x^n$ car $x^n \geq 0$ ainsi, $0 \leq$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \sin(3x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx \text{ d'où}$$

$$0 \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx$$

c) On calcule $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1}$ on en déduit d'après la question précédente

que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1}$ comme $0 < \frac{\pi}{6} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{n+1} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

EXERCICE 5

Partie A

$$(E) : y'' - y = 0$$

1- Déterminons les nombres réels r tels que la fonction h , définie par $h(x) = e^{rx}$ soit solution de (E).

La fonction h est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = r e^{rx}$ et $h''(x) = r^2 e^{rx}$

Ainsi, $h''(x) - h(x) = (r^2 - 1)e^{rx}$ et h est solution de l'équation (E) si et seulement si $r^2 = 1$, c'est-à-dire si, et seulement si

$$r = 1 \text{ ou } r = -1$$

2- Vérifions que les fonctions $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, où α et β sont deux nombres réels, sont des solutions de (E) : LA VERIFICATION EST FACILE.

3- Déterminons la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnée $\left(\ln 2 ; \frac{3}{4}\right)$ et admet en ce point une tangente dont le coefficient directeur est $\frac{5}{4}$.

Il faut ainsi chercher α et β tels que $\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ Vérifie $\varphi(\ln 2) = \frac{3}{4}$ et $\varphi'(\ln 2) =$

$\frac{5}{4}$ c'est à dire : $2\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{3}{4}$ et $2\alpha - \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{4}$ ce qui donne :

$\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{1}{2}$; la solution cherchée est donc

$$\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Partie B

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

1- Soit μ un nombre réel. Montrons que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \mu$ est équivalent à $e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$:

$$f(x) = \mu \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mu \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2\mu \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2\mu e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$$

Déduisons-en que l'équation $f(x) = \mu$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminons la en fonction de μ .

$f(x) = \mu \Leftrightarrow e^{2x} - 2\mu e^x - 1 = 0$ en posant $X = e^x$, l'équation précédente s'écrit alors $X^2 - 2\mu X - 1 = 0$

$\Delta = 4\mu^2 + 4 > 0$ X est positive et on a donc comme solution unique $X = \mu +$

$$\sqrt{\mu^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \ln(\mu + \sqrt{\mu^2 + 1})}$$

2- Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

Elles valent respectivement $+\infty$ et $-\infty$.

3- $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4- Tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

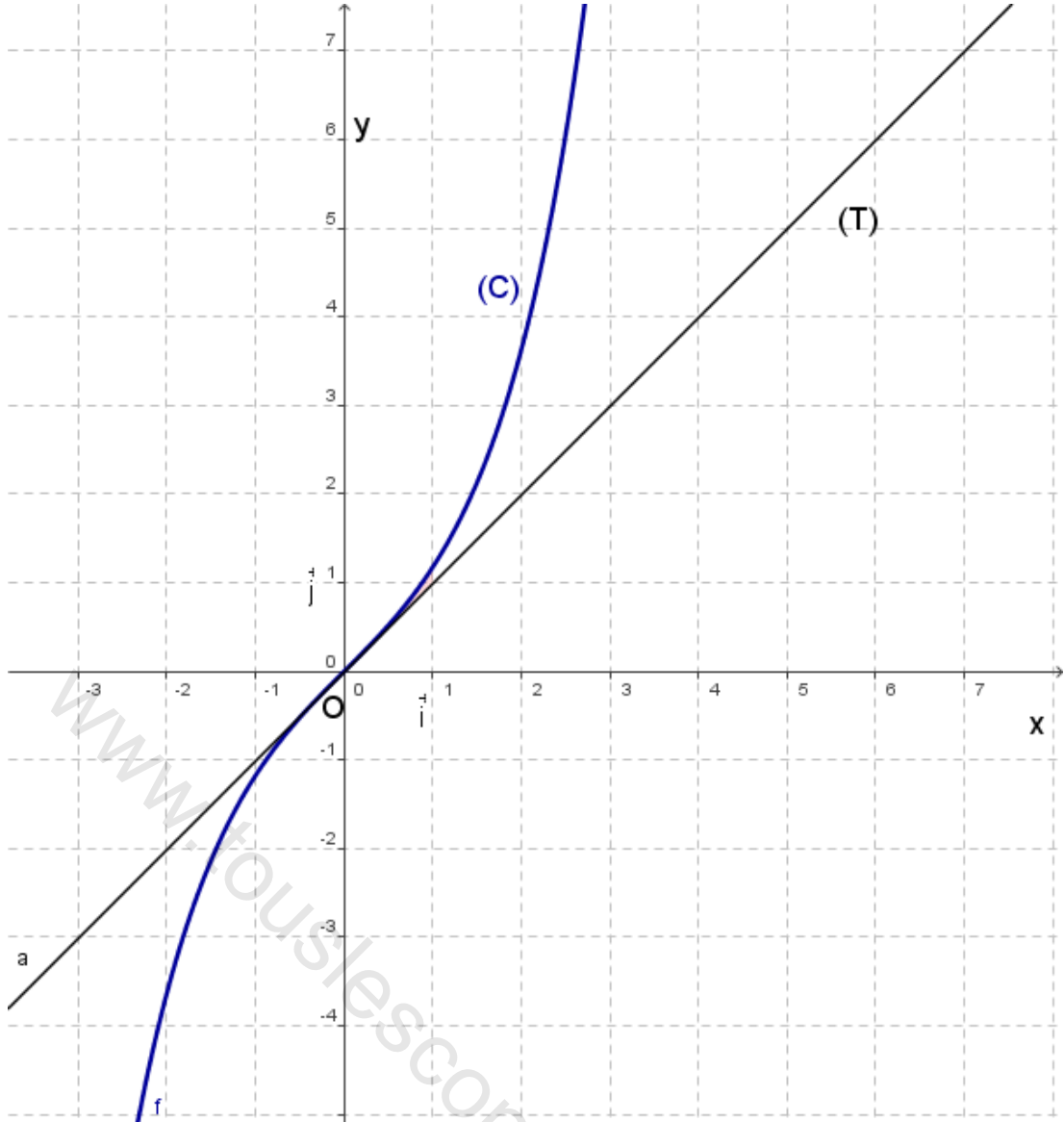
$$f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 0 \Rightarrow \underline{(T) : y = x}$$

5- $d(x) = f(x) - x$

$$d'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2} = \frac{(e^{2x} - 2e^x + 1)e^{-x}}{2} = \frac{(e^x - 1)^2 e^{-x}}{2} > 0$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente est donnée par le signe de $d(x)$. Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $d(0) = 0$, on en déduit que la courbe est en dessous de la tangente pour $x < 0$ et au dessus de celle ci pour $x > 0$.

6- Tracé de (C) et (T).



7- Calcul de l'aire de D

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(D) &= \int_0^1 [f(x) - x] dx = \int_0^1 d(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) - x \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\
 &= \left(\frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) - \frac{3}{2} \right) ua
 \end{aligned}$$

L'unité d'aire vaut $ua = 4 \text{ cm}^2$ d'où

$$\boxed{\mathcal{A}(D) = 2 \left(e + \frac{1}{e} \right) - 6}$$

PARTIE C

On cherche à caractériser les fonctions Φ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x \quad (H)$$

1. On suppose qu'il existe une telle fonction Φ

a) Justifions que $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) = x + x \int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt$

On a $(H) \Leftrightarrow \Phi(x) - \int_0^x x\Phi(t)dt + \int_0^x t\Phi(t)dt = x$

$$\Leftrightarrow \Phi(x) - x \int_0^x \Phi(t)dt + \int_0^x t\Phi(t)dt = x$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x) = x + x \int_0^x \Phi(t)dt - \int_0^x t\Phi(t)dt$$

- Calculons $\Phi(0)$:

$$\Phi(0) = 0 + 0 \int_0^0 \Phi(t)dt - \int_0^0 t\Phi(t)dt = 0 \Rightarrow$$

b) Démontrons que, $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi'(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t)dt$

On a $\Phi(x) = x + \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt$ (1)

$$\Rightarrow \Phi'(x) = 1 + \left(\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt \right)'$$

Calculons d'abord l'expression $\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt$.

Procédons par intégration par parties et posons $u'(t) = \Phi(t)$ et $v(t) = x-t$. On a $v'(t) = -1$ et posons $u(t) = \Psi(t)$, u' et v' sont continues du fait que $\Phi(t)$ est dérivable par hypothèse.

On a alors:

$$\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = [(x-t)\Psi(t)]_0^x + \int_0^x \Psi(t)dt$$

En remplaçant cette expression dans (1), on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= x + [(x-t)\Psi(t)]_0^x + \int_0^x \Psi(t)dt \\ &= x - x\Psi(0) + \int_0^x \Psi(t)dt\end{aligned}$$

Posons $\Gamma(t) = \int \Psi(t)dt$ une primitive de $\Psi(t)$, on a :

$$\Phi(x) = x - x\Psi(0) + \Gamma(x) - \Gamma(0) \Rightarrow$$

$$\Phi'(x) = 1 - \Psi(0) + \Gamma'(x) \text{ or } \Gamma'(x) = \Psi(x) \text{ donc}$$

$$\Phi'(x) = 1 - \Psi(0) + \Psi(x) = 1 + (\Psi(x) - \Psi(0)) = 1 + \int_0^x \Phi(t)dt$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\Phi'(x) = 1 + \int_0^x \Phi(t)dt}$$

- Calculons $\Phi'(0)$

On a $\Phi'(0) = 1 + \int_0^0 \Phi(t)dt = 1 \Rightarrow \boxed{\Phi'(0) = 1}$

c) Vérifions que Φ est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A

L'équation (E) est $y'' - y = 0$.

On a $\Phi'(x) = 1 + (\Psi(x) - \Psi(0)) \Rightarrow \Phi''(x) = \Psi'(x) = \Phi(x) \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi'' - \Phi = 0} \square$$

- Déterminons à quelle solution Φ correspond

On sait que toutes les solutions de (E) sont sous la forme $\alpha e^x + \beta e^{-x}$.

Or d'après les questions précédentes on a

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0 \\ \Phi'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \boxed{\Phi(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}$$

2) Calculons $\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt$

Posons $\begin{cases} u(t) = t \text{ et } v'(t) = e^t - e^{-t} \text{ on a} \\ u'(t) = 1 \text{ et } v(t) = e^t + e^{-t} \end{cases}$ alors :

$$\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt = [t(e^t + e^{-t})]_0^x - \int_0^x (e^t + e^{-t})dt = [t(e^t + e^{-t})]_0^x - [(e^t - e^{-t})]_0^x \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt = x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})}$$

3) Démontrer que la fonction $\Phi(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ vérifie (H)

$$\text{Calculons } \Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt$$

$$\text{On a : } \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = \int_0^x (x-t) \frac{(e^t - e^{-t})}{2} dt = \frac{x}{2} \int_0^x (e^t - e^{-t})dt - \frac{1}{2} \int_0^x t(e^t - e^{-t})dt$$

Or d'après la question précédente, $\int_0^x t(e^t - e^{-t})dt = x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})$ donc

$$\int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = \frac{x}{2}(e^x + e^{-x} - 2) - \frac{1}{2}x(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$= -x + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -x + \Phi(x) \Rightarrow$$

$$\Phi(x) - \int_0^x (x-t)\Phi(t)dt = x$$

La fonction trouvée à la question C-1-c vérifie la relation (H)