CORRECTION DE MATHEMATIQUES 2001

Exercice 1

I- Sachant que l'équation se réécrit $z^2-(z_1+z_2)z+z_1\cdot z_2=0$, on a : $\begin{cases} b=z_1\cdot z_2 \\ \text{et} \\ a=-(z_1+z_2)\end{cases}$ et

$|z_1| = |z_2|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} |b|=1 \\ \text{et} \\ |a|\leq |z_1|+|z_2|=2\end{cases}$ par ailleurs,

$$|z_1| = |z_2|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=e^{i\,\alpha_1} \\ z_2=e^{i\,\alpha_2}\end{cases} \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1\cdot z_2=e^{i\,(\alpha_1+\alpha_2)} \\ -(z_1+z_2)=e^{i\,(\pi+\alpha_1)}+e^{i\,(\pi+\alpha_2)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=e^{i(\alpha_1+\alpha_2)} \\ et \\ a=-\left(e^{i\,\alpha_1}+e^{i\,\alpha_2}\right)=-e^{i(\,\alpha_1+\alpha_2)/2}\left(e^{i(\,\alpha_1-\alpha_2)/2}+e^{-i(\,\alpha_1-\alpha_2)/2}\right) \\ \qquad =-\cos\dfrac{(\,\alpha_1-\alpha_2)}{2}e^{i(\,\alpha_1+\alpha_2)/2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg b=\alpha_1+\alpha_2 \\ et \\ \arg a=k\pi+\dfrac{(\,\alpha_1+\alpha_2)}{2}\ [2\pi]\ \text{ avec } k=0 \text{ ou } 1 \text{ selon le signe de } \cos\dfrac{(\,\alpha_1-\alpha_2)}{2}\end{cases}$$

On a donc $2\arg a=2k\pi+(\,\alpha_1+\alpha_2)=\arg b\ [2\pi]$ d'où:

$$|z_1| = |z_2|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} |b|=1 \\ |a|\leq |z_1|+|z_2|=2 \\ \arg b=2\arg a\end{cases}$$

II- 1) On suppose a=b. Alors :

(1)$\Rightarrow$ a=b=c (évident)

(2)$\Rightarrow$ $a(j^2+j)+c=a(j^4+j^2)+c=0$ car $j^4=j.j^3=1$ et $j\neq 1\Rightarrow$ $(-a+c)=0\Rightarrow$ $a=b=c(j^2+j+1=0)$

(3)$\Rightarrow$ $2a^2+c^2=a^2+2ac\Leftrightarrow a^2-2ac+c^2=0\Rightarrow(a-c)^2=0\Rightarrow a=b=c$

Il est clair de supposer a, b et c distincts deux à deux.

2) (1)$\Leftrightarrow$(3). En effet on a : (1)$\Leftrightarrow$ les images des trois nombres complexes a,b,c sont les trois sommets d'un triangle équilatéral (éventuellement réduit à un point)

$\Leftrightarrow$ $c-a=(b-a)e^{i\pi/3}$ ou $c-a=(b-a)e^{-i\pi/3}$

$\Leftrightarrow[(c-a)-(b-a)e^{i\pi/3}][(c-a)-(b-a)e^{-i\pi/3})]=0$

$\Leftrightarrow(c-a)^2+(b-a)^2-(c-a)(b-a)=0\Leftrightarrow$ (3)

(2)$\Leftrightarrow$(3). En effet, on a:

(2)$\Leftrightarrow$ $aj^2+bj+c=0$ ou $aj+bj^2+c=0$

$\Leftrightarrow(aj^2+bj+c)\,(aj+bj^2+c)=0$

$\Leftrightarrow$ $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0\Leftrightarrow$ (3)

D'où (1)$\Leftrightarrow$ (2)$\Leftrightarrow$ (3)

III) Puisque $z = 1$ n'est pas solution, $(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \Rightarrow$

$$Z^n = 1 \text{ avec } Z = \frac{z+1}{z-1}$$

$$\Leftrightarrow Z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \qquad k \in [\![1, n-1]\!]$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1}$$ les différentes solutions sont donc

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{z_k = -i\,\mathrm{cotan}\,\frac{k\pi}{n}}}, \quad k \in [\![1, n-1]\!]$$

Il y'a $n-1$ solutions, ce qui était prévisible car le polynôme $(z+1)^n - (z-1)^n$ est de degré $n-1$.

Exercice 2

Pour tout $k \in \mathbb{R}\{-0,1\}$, on définit $f_k : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$, telle que $f_k(x) = \exp[x^k \ln(x)]$.

1°) **1er cas : k >0**.

$$\lim_{x\to 0^+} x^k \ln x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f_k(x) = 1$$

$$F_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \begin{cases} f_k(x) & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \\ F_k(0) = 1 \end{cases} \end{array}$$

2eme cas : k<0.

$$\lim_{x\to 0^+} x^k \ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f_k(x) = 0$$

$$F_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \begin{cases} f_k(x) & \forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \\ F_k(0) = 0 \end{cases} \end{array}$$

2) **1er CAS : k >0**:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(F_k(x) - F_k(0)\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp x^k \ln x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^k \ln x}{x} \text{ car } \lim_{x\to 0^+} x^k \ln x = 0$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^{k-1} \ln x.$$

1er sous - cas : 0 $< k < 1$

Alors $\lim_{x\to 0^+} \left(\left(F_k(x) - F_k(0)\right)/x\right) = -\infty \notin \mathbb{R}$ donc F_k n'est pas dérivable à droite en 0.

Cependant, son graphe admet une demi- tangente horizontale orientée vers le bas.

2eme sous cas : k >1

Alors $\lim_{x\to 0^+}\left(\left(F_k(x)-F_k(0)\right)/x\right)=0\in\mathbb{R}$, donc F_k est dérivable à droite en 0, avec

$$F'_k(0)=0$$

.

<u>2^{eme} CAS </u>: k < 0 :

Alors

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\left(F_k(x)-F_k(0)\right)/x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\exp x^k \ln x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\exp\left(\left(x^k-1\right)\ln x\right)=0$$

D'où F_k est dérivable en droite en 0, avec $\underline{F'_k(0)=0}$

3) Etude de F_k sur $\mathbb{R}_+$

La fonction F_k est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, elle est dérivable au moins sur $]0;+\infty[$ avec :

$$\forall\, x>0, F_k'(x)=f_k'(x)=(x^{k-1}+kx^{k-1}\ln x)\exp[x^k\ \ln(x)]$$
$$=(1+k\ln x)x^{k-1}f_k$$

d'où :

$$F_k'(x)=0\Leftrightarrow x=x_k=e^{-\frac{1}{k}}\ ;\ \ y_k=F_k(x_k)=e^{-\frac{e^{-1}}{k}}$$

<u>1^{er} cas</u> : k >0 :

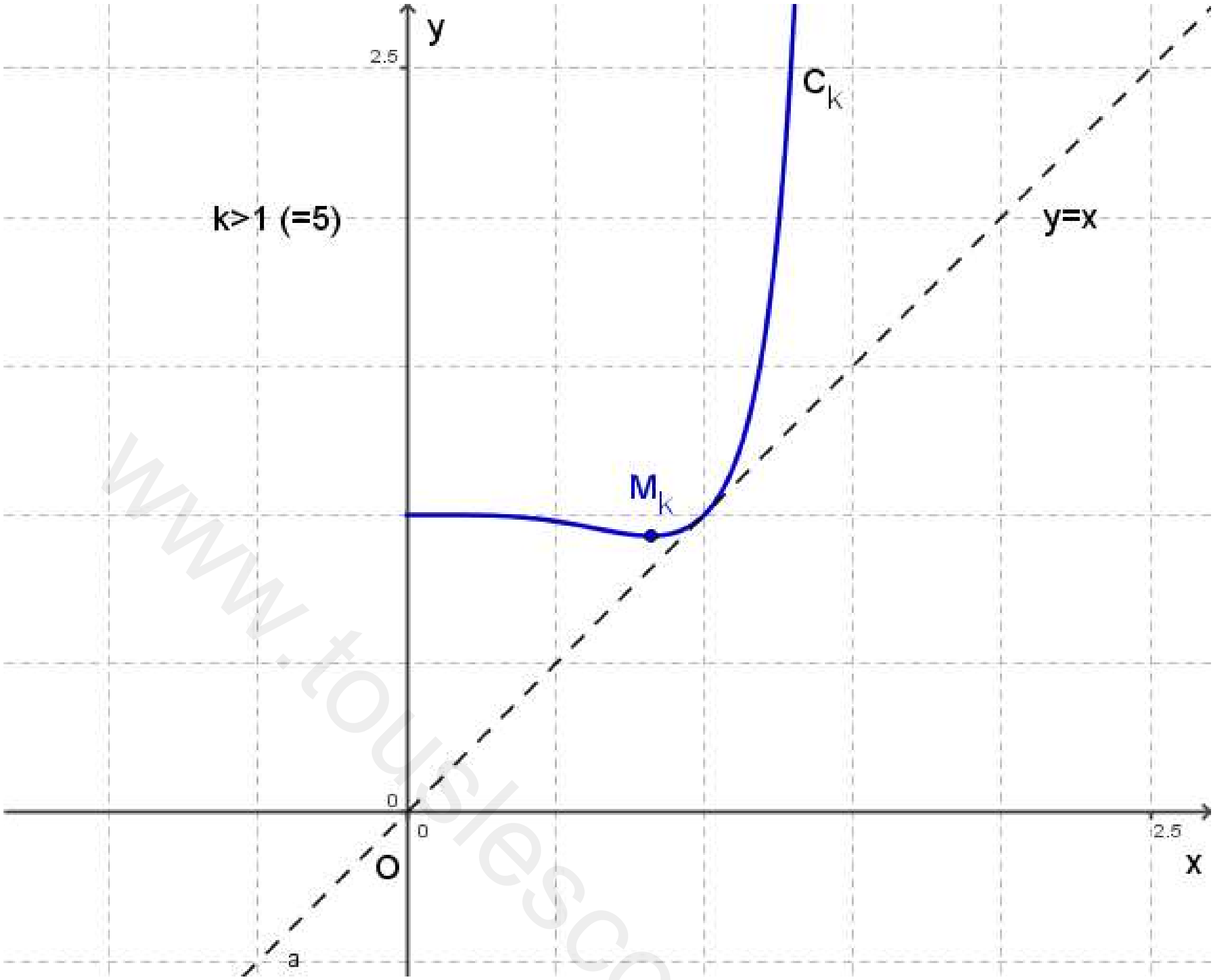
Alors $\begin{cases}x<x_k\Rightarrow F'_k(x)<0\\ x>x_k\Rightarrow F'_k(x)>0\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty}F_k(x)=+\infty$

<u>1^{er} sous cas</u> : k >1.

Alors $0<1/k<1\Rightarrow\begin{cases}\alpha=e^{-1}=0{,}36<x_k=e^{-\frac{1}{k}}<1\\ \beta=e^{-e^{-1}}=0{,}69<y_k=e^{-\frac{e^{-1}}{k}}<1\end{cases}$

x	0	α	x_k	1	$+\infty$
$F_k'(x)$	0	-	0	+	
$F_k(x)$	1 ↘		y_k ↗	1 ↗	$+\infty$

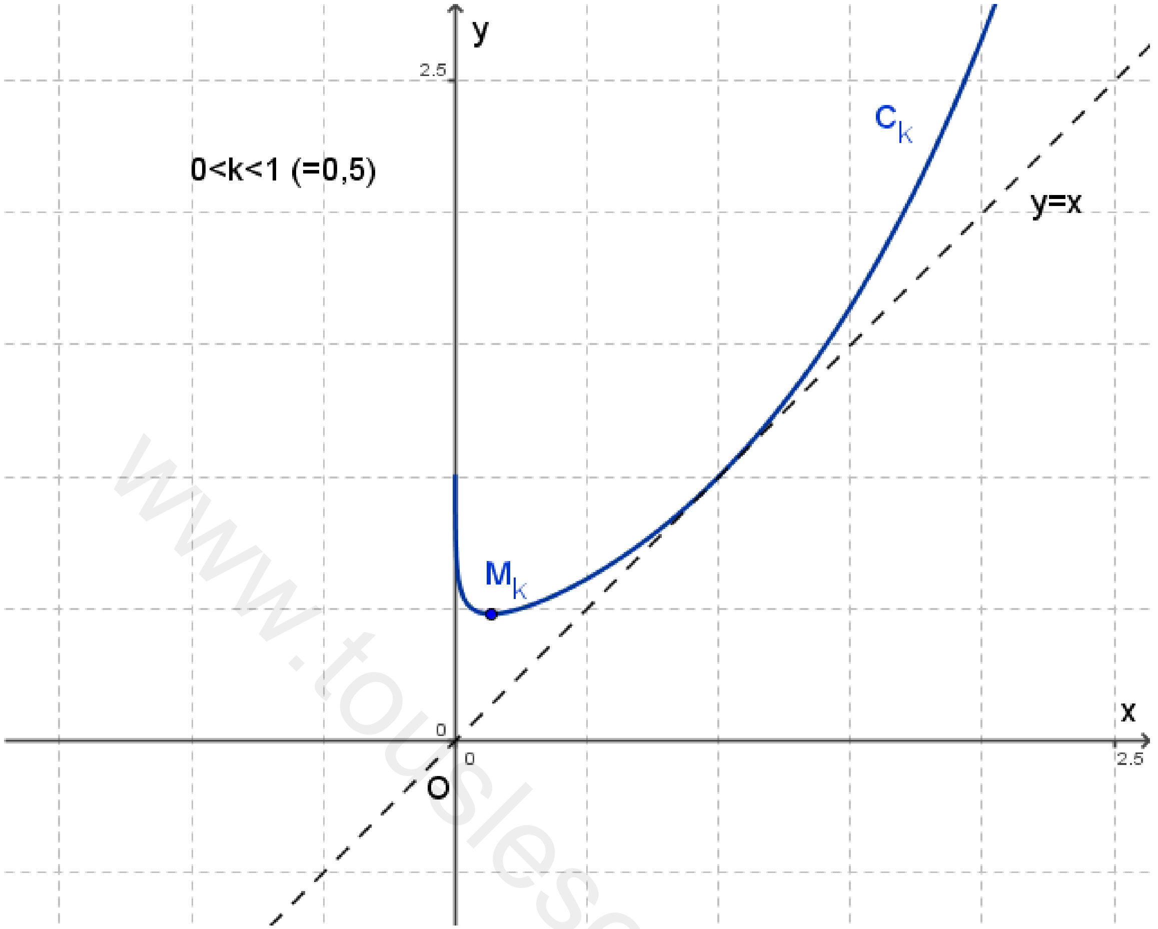


Le point $M_k(x_k, y_k)$ est un minimum.

<u>2^eme sous cas</u> : 0< k< 1.

Alors $1/k > 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x_k = e^{-\frac{1}{k}} < \alpha = e^{-1} = 0{,}36 \\ 0 < y_k = e^{-\frac{e^{-1}}{k}} < \beta = e^{-e^{-1}} \end{cases}$

x	0		x_k	α	1		$+\infty$
$F_k'(x)$		-	0			+	
$F_k(x)$	1	↘	y_k	↗	1	↗	$+\infty$



Le point $M_k(x_k, y_k)$ est encore un minimum.

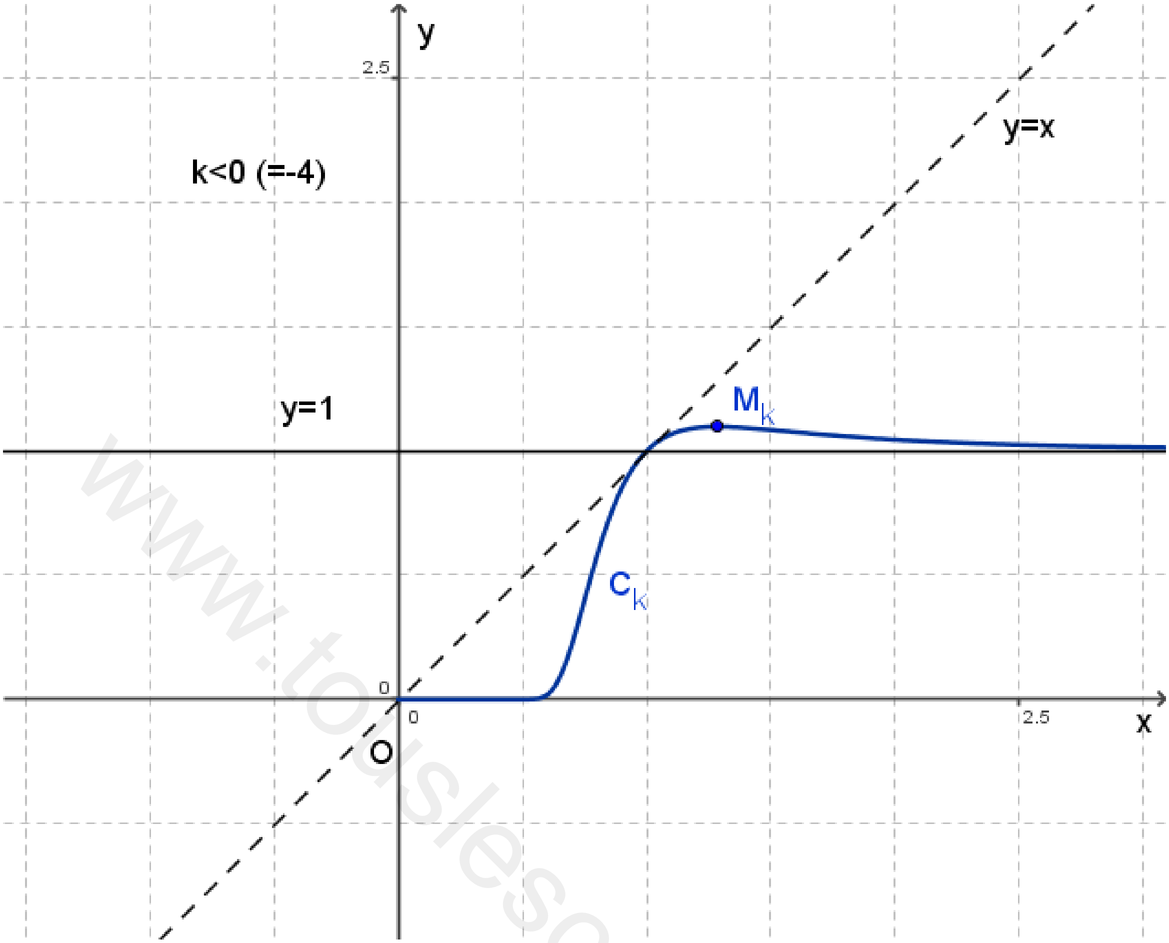
<u>2^{eme} cas</u> : k<0.

Dans ce cas, $1/k < 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x_k = e^{-\frac{1}{k}} \\ 1 < y_k = e^{-\frac{e^{-1}}{k}} \end{cases}$

x	0	α		1		x_k		$+\infty$
$F_k'(x)$	0		+	1		0	-	
$F_k(x)$	0		↗	1	↗	y_k	↘	0

Le point M_k est ici un maximum.

C_k admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.



Exercice 3

1. a) Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de souris blanches parmi les souris prélevées. Ici, X suit une loi binomiale $\beta\left(8, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$

$$P(X=2)=C_8^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{8-2}=\frac{5103}{16384}$$

b) On a $P(X \geq 1)=1-P(X=0)$ donc

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P(X=0) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow$$

$$C_n^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{4 \times 5} \Leftrightarrow$$

$$n \geq \frac{-2\ln 2-\ln 5}{\ln 3-2\ln 2}=\frac{-1{,}38-1{,}61}{1{,}1-1{,}38} \simeq 20{,}6 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{n_{min}=11}}$$

c) L'événement certain signifierait que $P(X \geq 1)=1$ i.e. $P(X=0)=0 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ ce qui est impossible donc un tel entier n'existe pas

2. $\boxed{P=\frac{C_5^2 \cdot C_{15}^6}{\boldsymbol{C_{20}^8}}=\frac{\mathbf{385}}{\mathbf{969}}}$

EXERCICE 4

1) $bar\{(G,-3),(O,2)\} = bar\{(A,-1),(B,-1),(C,-1),(B,1)(C,1)\} = A$

$\|-3\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{MO}\| = \|\overrightarrow{MO'}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MO'}\| \Leftrightarrow MA = MO'$

E_1 est donc la médiatrice de $[AO']$ (ou encore la parallèle à (BC) passant par G)

2) On a

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = (MG+GB)^2 + (MG+GC)^2 - 2(MG+GA)^2$$
$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2$$
$$= 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - 2\overrightarrow{GA}\right) + GB^2 + GC^2 - 2GA^2$$

Mais d'une part ,l'isobarycentre d'un triangle est situé aux deux tiers de la médiane à partir du sommet ,donc $GB^2 + GC^2 - 2GA^2 = 0$

Et d'autre part, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GO'} = -\overrightarrow{GA}$

L 'équation de E_2 s'écrit alors $6\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AG} = k$ 6MG**.** AG = k. Soit donc H ∊ (AG) tel que $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{k}{6}$.

Alors $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{k}{6} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{k}{6} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

Et E_2 est la parallèle à (BC) passant par H.

Pour que $G \in E_2$, il faut et il suffit que $k = 0$ et alors $E_1 = E_2$

3) Un calcul analogue à celui de 2) montre que

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Mais, $AO = AB \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ donc $AG = \frac{2}{3}AO = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Et $AG^2 = \frac{1}{3}a^2 = GB^2 = GC^2$ d'où l 'égalité demandée.

L'équation de E_3 est donc $3MG^2 = a^2$ $E_3 = \mathcal{C}\left(G, \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$