CORRECTION DE MATHEMATIQUES 2000

EXERCICE 1

Déterminons toutes les isométries du plan qui laissent invariant l'ensemble des points F de coordonnées $(n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

L'isométrie est un déplacement :

- l'application identique du plan
- les translations de vecteurs $n\vec{\imath}$, $n \in \mathbb{Z}$
- Les rotations qui conservent F sont les identités et les symétries centrales de centre un point de F ou le milieu de deux points consécutifs de F ou bien les points $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

L'isométrie est un antidéplacement

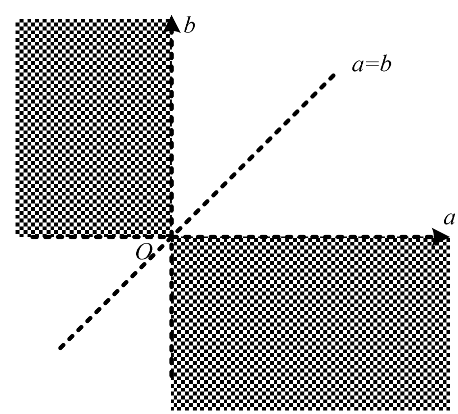
- les symétries d'axe (Ox)
- les symétries d'axe une droite passant par $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ et de direction $\vec{\jmath}$
- les symétries - translations d'axe (Ox) de vecteurs $n\vec{\imath}$, $n \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 2

I- 1°) a) $\Phi(a,b) = \left(\frac{1}{a-b}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ est définie si et seulement si $a \neq b$, $a \neq 0$, et $\frac{b}{a} > 0$

$$\boxed{\boldsymbol{E_1 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq b, a \neq 0, \frac{b}{a} > 0\right\}}}$$

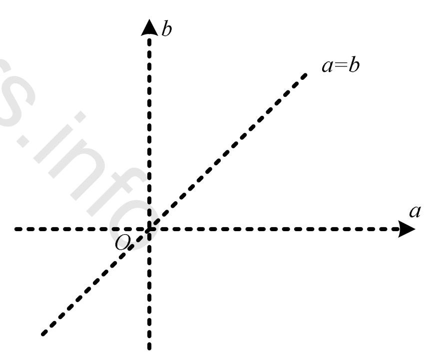
d'où la représentation (le complémentaire est hachuré et pointillé) :



b) $\Psi(a,b) = \left(\frac{1}{a-b}\right)\ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right)$ est définie si et seulement si $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, et $\frac{b^2}{a^2} > 0$

$$\boxed{\boldsymbol{E_2 = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / a \neq b, a \neq 0, b \neq 0\right\}}}$$

d'où la représentation (le complémentaire est hachuré et pointillé) :

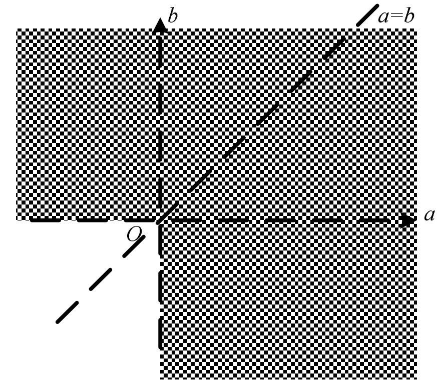


c) $\Phi(a,b) = \left(\frac{1}{a-b}\right)\ln\left(\frac{b}{a}\right) \geq 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} a - b > 0, & \dfrac{b}{a} \geq 1 \\ & \vee \\ a - b < 0, & \dfrac{b}{a} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 > a > b, \\ \vee \\ a < b < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{\boldsymbol{E'_1} = \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < 0 \textbf{ ou } \boldsymbol{b} < a < 0\}}$

Représentation (le complémentaire est hachuré et pointillé) :

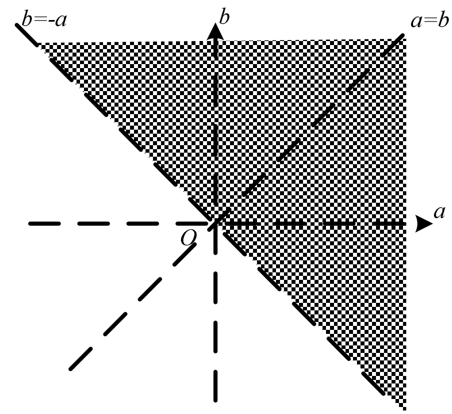


d) $\Psi(a,b) = \left(\frac{1}{a-b}\right) \ln\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \geq 0$

si et seulement si

$$\begin{cases} a - b > 0, & \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq 1 \\ & \vee \\ a - b < 0, & \left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b > 0, & (b-a)(b+a) \geq 0, \\ & \vee \\ a - b < 0, & (b-a)(b+a) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$\boxed{\boldsymbol{E'_2} = \{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2 / \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} < -b \textbf{ ou } \boldsymbol{a} < b < -a\}}$

Représentation (le complémentaire est hachuré et pointillé) :

2°) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)-\ln(0+1)}{x-0} = f'(0)$ avec $f(x) = \ln(x+1)$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$ d'où

$$\boxed{\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{0}} \frac{\ln(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{1}}$$

$$\Phi(a,b) = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{a-b} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a} - 1 + 1\right)}{-(b-a)} = -\frac{1}{a}\frac{\ln\left(\frac{b-a}{a} + 1\right)}{\frac{(b-a)}{a}}$$

Lorsque $b \to a$, on a $\frac{b-a}{a} \to 0$ d'où

$$\boxed{\lim_{\boldsymbol{b}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}}$$

Lorsque $a \to c$ et $b \to c$, on a $b \to a$ et donc

$$\boxed{\lim_{\substack{\boldsymbol{a}\to\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\to\boldsymbol{c}}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{c}}}$$

II 1°)

Résolution de $ae^{ax} = be^{bx}$

- Si $a = b$ alors tout réel est solution ($S = \mathbb{R}$)
- Si $(a,b) \in E_1$, alors $x = \Phi(a,b)$ est solution unique
- Si $ab < 0$, pas de solution

Résolution de $a^2e^{ax} = b^2e^{bx}$

- Si $a = b$ alors tout réel est solution ($S = \mathbb{R}$)
- Si $a \neq b$, $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $(a, b) \in E_2$ et $x = \Phi(a, b)$ est solution unique
- Si $a = 0$ ou $b = 0$ ou $a = b$ alors il n y a pas de solutions

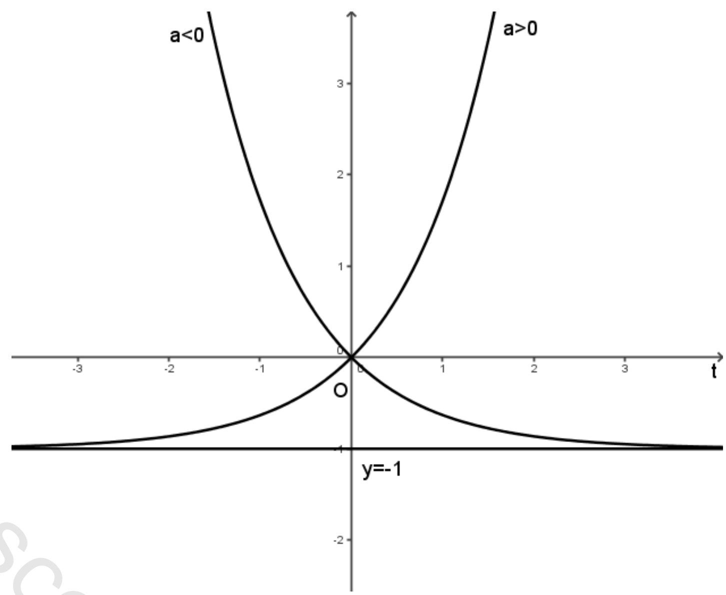
2°)

On a :

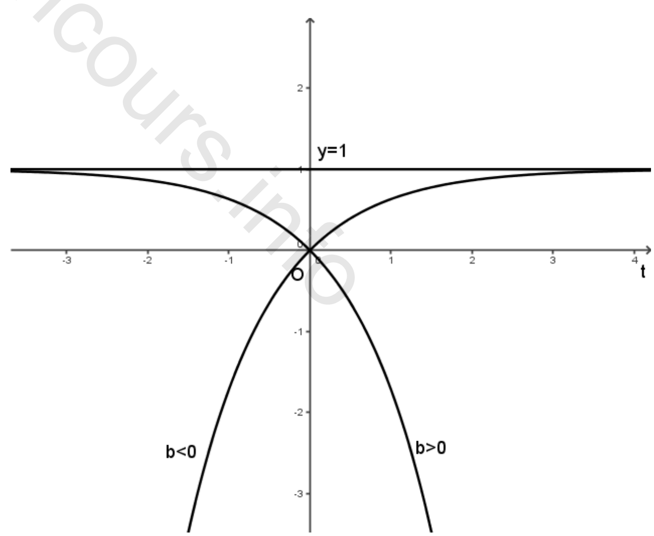
- $f_{(b,a)}(t) = e^{bt} - e^{at} = -f_{(a,b)}(t)$: $C_{(a,b)}$ et $C_{(b,a)}$ sont symétriques par rapport à (Ox).
- $f_{(-b,-a)}(t) = e^{-bt} - e^{-at} = f_{(b,a)}(-t) = -f_{(a,b)}(-t)$: $C_{(-b,-a)}$ et $C_{(b,a)}$ sont symétriques par rapport à (Oy) ; $C_{(-b,-a)}$ et $C_{(a,b)}$ sont symétriques par rapport à

3°)

- $f_{(a,0)}(t) = e^{at} - 1$ pour $a \neq 0$;
- $f_{(a,0)}(t) = 0$ pour $a = 0$



- $f_{(b,0)}(t) = 1 - e^{bt}$ pour $b \neq 0$;
- $f_{(b,0)}(t) = 0$ pour $b = 0$



4°)

$\lim\limits_{t\to+\infty} f_{(a,b)}(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{bt}\left(e^{(a-b)t} - 1\right) = +\infty$ $\lim\limits_{t\to-\infty} f_{(a,b)}(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{bt}\left(e^{(a-b)t} - 1\right) = 0$

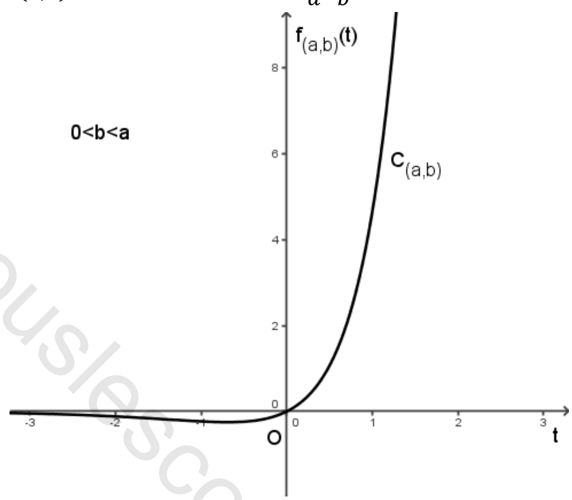
$f'_{(a,b)}(t) = ae^{at} - be^{bt}$; $f'_{(a,b)}(t) = 0$ pour $t = \frac{\ln(b/a)}{a-b} = \Phi(a,b) \leq 0$ car $a - b < 0$.

Tableau de variations

t	$-\infty$		$\Phi(a,b)$		0		$+\infty$
$f'_{(a,b)}(t)$		-	0	+	$a-b$	+	
$f_{(a,b)}(t)$	0	↘	m	↗	0	↗	$+\infty$

Avec $m = f_{(a,b)}(\Phi(a,b)) = e^{b\frac{\ln\frac{b}{a}}{a-b}}\left(e^{(b-a)\frac{\ln\frac{b}{a}}{a-b}} - 1\right) = e^{b\frac{\ln\frac{b}{a}}{a-b}}\left(\frac{b}{a} - 1\right) < 0$ car $b < a$.

$f''_{(a,b)}(t) = a^2e^{at} - b^2e^{bt}$; $f''_{(a,b)}(t) = 0$ pour $t = \frac{\ln(b^2/a^2)}{a-b} = \Psi(a,b) \leq 0$ car $a - b < 0$.



EXERCICE 3

I- $f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$

1°) $D_f = \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = -x + \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -x + \frac{e^x-1}{e^x+1} = -\left(x + \frac{1-e^x}{1+e^x}\right) = -f(x)$$

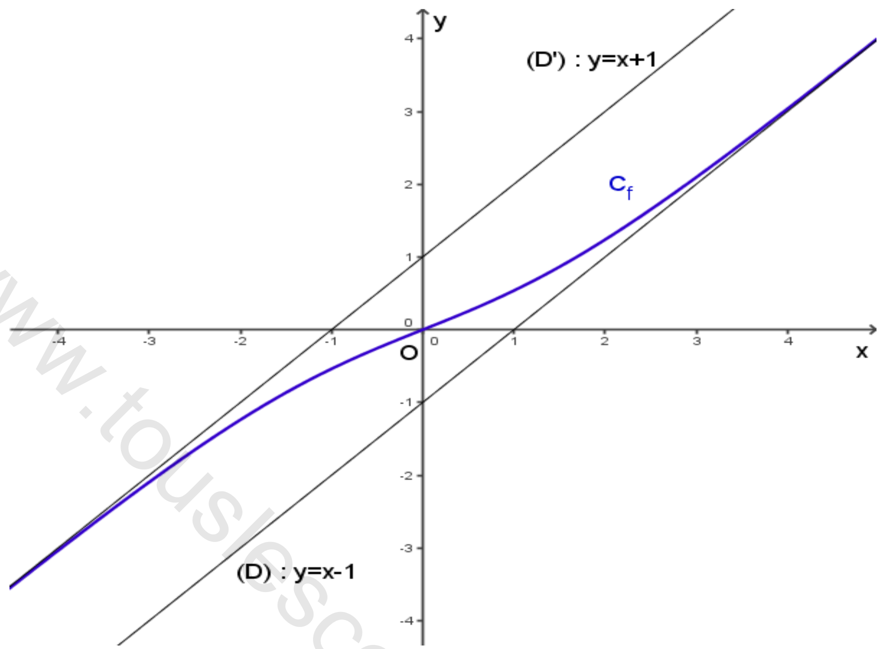
Donc f est impaire et le domaine d'étude est $\mathbb{R}_+$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- De $f(x) - x = \frac{1-e^x}{1+e^x}$, on a $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = -1$ donc C_f admet la droite $(D) : y = x - 1$ pour asymptote oblique.
- La symétrie de C_f par rapport à O implique l'existence d'une seconde asymptote oblique $(D') : y = x + 1$.
- Par ailleurs, $f(x) - x + 1 = \frac{2}{1+e^x} > 0$, donc C_f est au dessus de l'asymptote (D)
- $f'(x) = \frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Point d'inflexion : $f''(x) = \frac{2ex\,(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$ s'annule en $x = 0$.
- Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Graphe.



2°) $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(x) - 1 = 2\frac{1+e^{2x}}{(1+e^x)^2} - 1 = \frac{2+2e^{2x}-1-2e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{1-2e^x+e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{(1-e^x)^2}{(1+e^x)^2} = (f(x)-x)^2$

3°) $\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \underline{\boldsymbol{-\ln(1+e^{-x}) + K,\quad K \in \mathbb{R}}}$

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda}\big(f(x)-(x-1)\big)dx = \int_0^{\lambda}\frac{2}{1+e^x}dx = 2[-\ln(1+e^{-x})]_0^{\lambda} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A(\lambda) = -2\ln\left(1+e^{-\lambda}\right) + 2\ln 2}}$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 2\ln 2}}$$

II 1°)

Posons $I(a,a)$, alors, $IS_a(M)(-x+a, -y+a)$ est égal à IM, donc **S_a est la symétrie par rapport à I.**

$MT_a(M)(a,a)$ est égal à OI, donc **T_a est la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$**.

2°)

L'abscisse de $S_a \circ S_b(M)$ est $x + 2\,(a-b)$, donc $\underline{\boldsymbol{S_a \circ S_b(M) = T_{2(a-b)}}}$

L'abscisse de $T_a \circ T_b(M)$ est $x + (a + b)$, donc $\underline{\boldsymbol{T_a \circ T_b(M) = T_{a+b}}}$

L'abscisse de $S_a \circ T_b(M)$ est $-x + 2\left(a - \frac{b}{2}\right)$, donc $\underline{\boldsymbol{S_a \circ T_b = S_{\left(a - \frac{b}{2}\right)}}}$.

L'abscisse de $T_a \circ S_b(M)$ est $-x + 2\left(b + \frac{a}{2}\right)$, donc $\underline{\boldsymbol{T_a \circ S_b = S_{\left(b + \frac{a}{2}\right)}}}$.

- G est donc stable pour la composition des applications.
- De plus G≠ϕ (car $Id_{\mathcal{P}} \in G$ et $S_a^{-1} = S_a, T_a^{-1} = T_{-a}$) donc G est un sous groupe du groupe des bijections affines de P.
- Si $a \in \mathbb{R}^*$, $S_a \circ T_a = S_{a/2}$, mais $T_a \circ S_a = S_{3a/2}$. G n'est donc pas commutatif.

3°) $(T_a \circ S_0) \circ T_a^{-1} = S_{a/2} \circ T_a^{-1} = S_{a/2} \circ T_{-a} = S_a$, d'après les calculs du 2).

4°) On sait d'après I-1) que la courbe C étant symétrique par rapport à O, on a : $S_0(C) = C$.

Alors $S_a(C_a) = S_a \circ T_a(C) = S_{\frac{a}{2}}(C) = T_a \circ S_0(C) = T_a(C) = C_a$

Donc I est le centre de symétrie de C_a (la translation conserve le centre de symétrie).

5°) $M(x, y) \in C_a \Leftrightarrow \exists N(x - a, y - a) \in C \Leftrightarrow y - a = f(x - a)$

$$\Leftrightarrow y = x + \frac{1 - e^{x-a}}{1 + e^{x-a}}$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{f_a / C_a : y = f_a(x)} \textbf{ avec } \boldsymbol{f_a(x) = x + \frac{1 - e^{x-a}}{1 + e^{x-a}}}$$