# EAMAC – 2014 - SUJET M-T-7

## Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre l'équation différentielle : $2y'+y=0$ $(E)$ où $y$ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) On considère l'équation différentielle : $2y'+y=e^{-\frac{x}{2}}(x+2)$ $(E')$

a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=e^{-\frac{x}{2}}(ax^2+bx)$ soit une solution de $(E')$.

b) Soit $g$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que : $g$ est solution de $(E')$ si et seulement si $f-g$ est solution de $(E)$.

c) Résoudre l'équation $(E')$.

## Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction numérique $u$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $u(x)=1-\ln x$.

1) Etudier le signe de $u(x)$.

2) Soit la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x(1-\ln x)$

a) Déterminer $g'(x)$.

b) En déduire une primitive $U$ de $u$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en $e^2$.

3) On considère la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n=\int_{e^{-n}}^{e^{-n+1}}(1-\ln x)dx$

a) Justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a : $v_n \geq 0$.

b) Calculer $v_n$ en fonction de $n$.

c) Déterminer la limite de $v$.

4) Pour tout entier naturel $n$, on pose : $s_n=\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0+v_1+...+v_n$.

a) Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

b) Déterminer la limite de $S_n$.

## Exercice 3 (5 points)

1. Reproduire et compléter le tableau suivant:

| $z$ | $1+i$ | $2$ | $1-i$ | $i\sqrt{2}$ | $1+i\sqrt{3}$ | $-1+i$ | $1-i\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}+i$ | $2i$ | $-3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | | | | | | | | | | | | |
| $\arg z$ | | | | | | | | | | | | |

Une boîte contient $12$ cartons, indiscernables au toucher, portant les $12$ nombres complexes du tableau précédent (Chaque carton porte un seul nombre complexe):

2. On tire au hasard un carton de la boîte (On suppose l'équiprobabilité des tirages).
   a) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre réel?
   b) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont le module est égal à $\sqrt{2}$ ?
   c) Quelle est la probabilité de tirer un carton portant un nombre complexe dont un argument $\theta$ est tel que: $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ?

3. Un jeu consiste à tirer un carton de la boîte précédente. Si le nombre complexe inscrit sur le carton tiré est de module $3$, le joueur gagne $10\,000$ points et le jeu s'arrête. Sinon, le carton tiré est remis dans la boîte et le joueur procède à un deuxième tirage; si ce carton porte un nombre complexe de module $3$, le joueur gagne $8\,000$ points, s'il est de module $2$, il gagne $5\,000$ points sinon il ne gagne rien et le jeu s'arrête.

Soit $X$ la variable aléatoire égale au gain du joueur.
   a) Donner la loi de probabilité de $X$ (On pourra s'aider d'un arbre).
   b) Calculer l'espérance mathématique de $X$.

**Exercice 4 (   points)**

1) On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 - x^2 - 2x + 2$.
a) Dresser le tableau de variations de $g$.
b) Montrer que $g$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur R.
c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution $\alpha$ telle que $0,6 \leq \alpha \leq 0,7$.

2) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2+2}$.

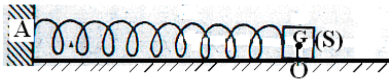
a) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2+2)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de $f$.
c) Tracer la courbe représentative $(C)$ de $f$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}, \|\vec{j}\| = 5\text{cm}$.
3) On considère la suite numérique $(U_n)$ définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :
$$U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt.$$
On ne cherche pas à calculer l'intégrale $U_n$
a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq U_n \leq (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
b) Déterminer un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$.

# EAMAC – 2014 - SUJET P-T-8

## *Exercice 1 (5pt )*

***Les frottements sont négligeables.***

**On considère un ressort très long à spires non jointives de masse négligeable et de raideur K. Le ressort est placé sur une table horizontale. On fixe l'une des extrémité du ressort et on accroche à son autre extrémité un solide ponctuel de masse m.**




**On déplace le solide de sa position d'équilibre d'une distance $x_0$ =5cm et on l'abandonne sans vitesse initiale.**

**1.1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le solide et montrer que le système {ressort solide terre} est conservatif. (1pt)**

**1.2 Pour une position x quelconque donner l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de K, m, x et de la vitesse V du solide. (1pt)**

**1.3 Donner cette expression en fonction de K et $x_0$. Déduire l'expression de V en fonction de K, m, $x_0$ et x. (0,75pt)**

**2.1 Montrer que l'énergie potentielle élastique du ressort peut s'écrire sous la forme : $E_{pe}$= a $V^2$ +b. (0,75pt)**

**2.2 L'expérience montre que $E_{Pe}$= - 0,1 $V^2$ + $2{,}5.10^{-2}$. Déduire les valeurs de m et de K. (0,75pt)**

**2.3 Calculer la vitesse du solide lors du passage par sa position d'équilibre. (0,75pt)**

## *Exercice 2 (5pt )*

**On relie l'extrémité O d'une lame vibrante à une corde tendue de longueur OO'=2m. La lame vibrante subit des oscillations sinusoïdales verticales de fréquence N=100Hz et d'amplitude a=3mm. Ces vibrations se propagent le long de la corde avec une célérité c = 20m/s.**

**1 Calculer la longueur de l'onde$\lambda$.** *(0,5pt)*

**2 Décrire le phénomène observé au moment où la corde est éclairée par un stroboscope dont les fréquences prennent les valeurs:**
**Ne = 200 Hz ; Ne = 25 Hz ; Ne = 50 Hz et Ne = 102 Hz.** *(1pt)*

**3 En considérant l'origine des temps l'instant où O passe par sa position d'équilibre dans le sens positif ; écrire l'équation horaire $y_O$ du mouvement de la source O et donner l'élongation $y_M$ d'un point M situé à la distance x de la source O.** *(1,5pt)*

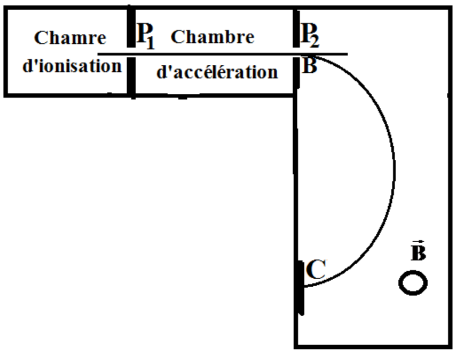
**4 Déterminer l'expression des abscisses des points qui vibrent en phase avec la source O, préciser leur nombre et la valeur de l'abscisse du point le plus proche de O.** *(0,75pt)*

**5 Mêmes questions pour les points qui vibrent en opposition de phase avec O.** *(0,75pt)*

**6 présenter l'aspect de la corde à l'instant t = 0,03s.** *(0,5pt)*

# *Exercice 3 (5pt )*

**On place un élément chimique inconnu X dans une chambre d'ionisation. Elle produit des ions $X^{n+}$ qui sont introduits avec une vitesse nulle en $P_1$ (voir la figure).**
**La masse des ions est notée m et on donne e= 1,6 $10^{-19}$ C.**




**1. Entre $P_1$ et $P_2$ on applique une différence de potentiel U =$U_{P1P2}$. Exprimer la vitesse $V_B$ des ions au trou B de la plaque $P_2$ en fonction de n, e, m et $U_{P1P2}$.** *(0,75pt)*

**2. En B ouverture très petite, les ions pénètrent avec une vitesse horizontale dans une région où règne un champ magnétique perpendiculaire au plan de la figure. Les particules sont détectées au point C.**

**2.1 Indiquer le sens du champ magnétique.** *(0,5pt)*

**2.2 Déterminer la nature du mouvement dans le champ magnétique.** *(0,75pt)*

**2.3 Quelle est la vitesse en C?** *(0,5pt)*

**3. Exprimer la distance BC en fonction de m, n, e, $U_{P1P2}$ et B (où B est la norme du champ magnétique).** *(1pt)*

**4. On sait que X est : soit l'isotope de masse atomique 59 du nickel qui conduit à l'ion $Ni^{2+}$, soit de l'aluminium (isotope de masse atomique 27) qui conduit à $Al^{3+}$, soit de l'argent (isotope de masse atomique 108) qui conduit à $Ag^{+}$.**
**Calculer numériquement les distances BC correspondant à chacun des trois ions.**
**On donne : B=1 T , $U_{P1P2}$ = 1000 V et $m_p$ = 1,67 $10^{-27}$kg** *(0,75pt)*

**5. On trouve approximativement BC=27,4mm. Quel est l'élément X?** *(0,75pt)*

# *Exercice 4 (5pt )*

**Une bobine sans noyau de fer est formée de 2000 spires de 6cm de diamètre, réparties uniformément sur une longueur de 40 cm. Cette bobine est placée en série avec un condensateur de capacité réglable (boite de condensateur) une résistance R =60Ω et un milliampèremètre de résistance négligeable. L'ensemble est branché aux bornes d'une prise de courant alternatif sinusoïdal de fréquence 50Hz, de tension efficace 120V. L'intensité efficace passe par un maximum 1,5A pour C=318µF.**

**On demande :**

**1.1 La valeur théorique de l'inductance de la bobine. On donne :$\mu_0=4\pi.10^{-7}$S.I. (0,5pt)**

**1.2 La valeur de cette inductance déduite des résultats de l'expérience, expliquer le sens de la différence entre les deux valeurs trouvées. (0,5pt)**

**1.3 La valeur de la résistance R' de la bobine. (0,5pt)**

**2 On considère maintenant une bobine dont on ne connait ni la résistance R ni l'inductance L.**
**On se propose de déterminer ces deux grandeurs. Pour cela on réalise le montage suivant : entre deux bornes A et B d'une prise de courant alternatif sinusoïdal, on branche en série, dans l'ordre une résistance connue r = 25 Ω et la bobine à étudier. On appelle C le point de connexion de la résistance à la bobine.**
**On dispose alors de trois voltmètres : V entre les bornes A et B ; $V_1$ entre A et C et $V_2$ entre C et B. Ils indiquent respectivement les valeurs efficaces : U=110V, $U_1$=45,5V et $U_2$=80V des trois tensions : $u=V_A - V_B$ ; $u_1=V_A - V_C$ et $u_2=V_C - V_B$**
**On appelle i la valeur instantanée de l'intensité du courant de fréquence f =50Hz.**

**2.1 Faire le schéma du montage. (0,5pt)**

**2.2 Construire le diagramme de Fresnel relatif à cette expérience représentant les trois tensions $u_1$ , $u_2$ et u. (0,5pt)**
**2.3 Calculer l'impédance de la bobine. (0,5pt)**
**2.4 Déterminer la phase de $u_2$ par rapport à i. (0,5pt)**
**2.5 Calculer les valeurs des grandeurs R et L. (0,5pt)**
**2.6 Calculer la puissance moyenne consommée dans le circuit. (1 pt)**