

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

***Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.***

**Exercice 1**

Un enfant joue avec 20 billes, 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

**1.** Dans un premier jeu, il choisit simultanément 3 billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

**a.** Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

**b.** Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

**2.** Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes (probabilité identique de tirer l'une ou l'autre des deux boîtes), puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

$A1$  : « l'enfant choisit la boîte cubique »

$A2$  : « l'enfant choisit la boîte cylindrique »

$R$  : « l'enfant prend une bille rouge »

$V$  : « l'enfant prend une bille verte »

- a. Calculer la probabilité de l'évènement  $R$ .
- b. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
3. L'enfant reproduit  $n$  fois de suite son deuxième jeu (tirage d'une bille), en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
- a. Exprimer, en fonction de  $n$ , la probabilité  $p_n$  que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses  $n$  choix.
- b. Calculer la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle  $p_n \geq 0,99$ .

## Exercice 2

### *Partie A*

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0;+\infty[$  par :  $f(x) = x + \ln x$ .

On nomme  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- Etudier la fonction  $f$  et tracer sa courbe représentative.
- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $]0;+\infty[$ .

On note  $\alpha_n$  cette solution. On a donc pour tout entier naturel  $n$  :  $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$ .

  - Préciser la valeur de  $\alpha_1$ .
  - Démontrer que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement croissante.
- Déterminer l'équation de la tangente  $\Delta$  à la courbe  $\Gamma$  au point A d'abscisse 1.
  - Etudier la fonction  $h$  définie sur  $]0;+\infty[$  par :  $h(x) = \ln x - x + 1$ .
  - En déduire la position de la courbe  $\Gamma$  par rapport à  $\Delta$ .
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$ .

Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .

## Partie B

On considère une fonction  $g$  continue, strictement croissante sur  $]0;+\infty[$  et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie A, définir une suite  $(\beta_n)$  de réels tels que  $g(\beta_n) = n$ , et que cette suite est strictement croissante.

1. Démontrer qu'une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .

2. Montrer que la suite  $(\beta_n)$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 3

1. Soit la suite  $(u_n)$ , définie par  $u_1 = \frac{1}{2}$  et par la relation de récurrence :  $u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3}$ .

a. Soit la suite  $(v_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par  $v_n = u_n - \frac{2}{5}$  : montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis celle de  $u_n$ .

2. On considère deux dés, notés A et B. Le dé A comporte trois faces rouges et trois faces blanches. Le dé B comporte quatre faces rouges et deux faces blanches.

On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.

On désigne par  $A_n$  l'évènement « on utilise le dé A au  $n^{\text{ième}}$  lancer ».

Par  $\overline{A_n}$  l'évènement contraire de  $A_n$ .

Par  $R_n$  l'évènement « on obtient rouge au  $n^{\text{ième}}$  lancer ».

Par  $\overline{R_n}$  l'évènement contraire de  $R_n$ .

Par  $a_n$  et  $r_n$  les probabilités respectives de  $A_n$  et  $R_n$ .

a. Déterminer  $a_1$ .

b. Déterminer  $r_1$ .

c. En remarquant que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$ , montrer que

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}.$$

d. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$ .

e. En déduire que pour tout  $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ , puis déterminer l'expression de  $a_n$  en fonction de  $n$ .

f. En déduire l'expression de  $r_n$  en fonction de  $n$ , puis la limite de  $r_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

#### **Exercice 4**

Etudier la série de terme général  $u_n = \sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$ , avec  $a$  un nombre réel compris entre 0 et 1 inclus (indication : démontrer que l'on peut se ramener à l'étude d'une série à termes positifs et effectuer un développement limité de  $u_n$  à l'ordre 2)

#### **Exercice 5**

1. Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie. On appelle projecteur de  $E$  tout endomorphisme  $p$  de  $E$  vérifiant  $p^2 = p \circ p = p$ . Démontrer que  $p$  est diagonalisable.

2. Soit  $u, v$  et  $f$  trois endomorphismes de  $E$  tels qu'il existe  $(\lambda, \mu)$  appartenant à  $\mathbb{R}^2$  (où  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels) avec :

$$f = \lambda u + \mu v, f^2 = \lambda^2 u + \mu^2 v, f^3 = \lambda^3 u + \mu^3 v$$

a. Démontrer que  $f^3 - (\lambda + \mu)f^2 + \lambda\mu f = 0$

b.  $f$  est-elle diagonalisable ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

**Sujet n° 1**

Forces et faiblesses de la société démocratique (dite aussi "société ouverte").

**Sujet n° 2**

"Pas de liberté pour les ennemis de la liberté" déclarait le dirigeant politique Saint-Just pendant la Révolution Française, à l'époque de la Terreur. Que pensez-vous de cette formule ?

**Sujet n° 3**

La mondialisation vous paraît-elle un bien ou un mal pour l'Afrique ?

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ÉCONOMIE**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Le candidat traitera au choix l'un des deux sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

**Mobilisez vos connaissances théoriques pour expliquer les enjeux de la « crise » actuelle des dettes publiques européennes.**

**Sujet n° 2**

**I - Exercice de microéconomie (8 points)**

Soit un producteur en concurrence parfaite dont la fonction de production est :

$$f(q_1, q_2) = q_1^{1/4} q_2^{1/2}$$

Soit  $p$ , le prix de l'output, et  $p_1, p_2$  les prix respectifs des deux inputs.

- 1) Quel est la nature des rendements d'échelle ? Interprétez.
- 2) Quelle propriété importante doivent vérifier les productivités marginales en concurrence parfaite ? Est-ce le cas ?
- 3) Après avoir rappelé sa définition, calculez son taux marginal de substitution technique.
- 4) Après avoir rappelé sa définition, tracez l'isoquante passant par le panier (8, 4). Quelles sont ses propriétés ?

- 5) Donnez les conditions de maximisation du profit, en fonction de  $q_1, q_2$ . Interprétez.
- 6) Calculez les demandes optimales d'intrants pour des prix quelconques.
- 7) Donnez sa fonction d'offre concurrentielle pour  $p_1 = p_2 = 1$ . Interprétez.
- 8) Donner la fonction de coût (en fonction de la quantité d'output), toujours pour  $p_1 = p_2 = 1$ . En déduire à nouveau la fonction d'offre concurrentielle.

## II - Exercice de macroéconomie (6 points)

On se place dans le cadre d'un modèle dit « keynésien » (prix fixes et excès d'offre sur le marché des biens et du travail) en économie ouverte en supposant une situation de taux de change fixe. Ce modèle caractérise l'économie d'un « petit pays » par les trois relations d'équilibre suivantes :

$$[1] \quad Y = c(Y-T) - \gamma i + i_0 + G + Z(x, Y)$$

où  $Y$  représente le revenu,  $i$  le taux d'intérêt,  $G$  les dépenses publiques,  $T$  les prélèvements obligatoires et où  $c$  et  $\gamma$  sont deux paramètres :  $0 < c < 1$  et  $\gamma > 0$  ;

où  $Z$  représente le solde de la balance commerciale (mesuré en monnaie nationale), fonction du revenu  $Y$  et du taux de change réel  $x$  (avec  $x = \frac{eP^*}{P}$ , où  $e$  représente le taux de change nominal coté à l'étranger,  $P^*$ , le prix des biens étrangers en monnaie étrangère), soit :  $Z(x, Y) = ax - bY$ ,  $a$  et  $b$  étant deux paramètres strictement positifs.

$$[2] \quad \frac{\bar{M}}{P} + \lambda R = \alpha Y - \mu i$$

où  $\bar{M}$  est l'offre de monnaie domestique,  $P$  le prix des biens domestiques et  $R$  les réserves de devises exprimées en prix domestiques ;

où  $\lambda$ ,  $\alpha$  et  $\mu$  sont des paramètres :  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\alpha > 0$  et  $\mu > 0$ .

$$[3] \quad \Delta R = Z(x, Y) + H$$

où  $\Delta R$  est la variation des réserves de devises et  $H$  le solde de la balance des capitaux supposé dépendre de l'écart entre le taux d'intérêt national ( $i$ ) et le taux d'intérêt « mondial » ( $i^*$ ) :

$H = h(i - i^*)$  où  $h$  est un paramètre positif ou nul.

1) Commentez les différentes relations d'équilibre (en précisant ce qu'elles représentent et les hypothèses théoriques sur lesquelles elles s'appuient). (2 points)

2) On fait l'hypothèse d'absence de politique de stérilisation de la variation de la position monétaire extérieure. Commentez brièvement cette hypothèse et précisez quel paramètre du modèle s'en trouve affecté. (1 point)

3) Quel est l'impact d'une augmentation du taux de change réel sur le solde de la balance commerciale (expliquez votre réponse) ? (1 point)

4) Quels est l'impact d'une politique budgétaire expansionniste dans une situation où les capitaux sont supposé totalement immobiles ? Vous étayerez votre réponse sur une analyse graphique. (2 points)

### **III - Questions (6 points)**

1) Innovation et destruction créatrice chez J. Schumpeter (3 points).

2) Le travail commandé chez A. Smith (3 points).

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**ANALYSE D'UNE DOCUMENTATION STATISTIQUE**

**(Durée de l'épreuve : 2 heures)**

***Note : La note finale tiendra compte, de façon non négligeable, des commentaires demandés explicitement.***

Le sujet porte sur l'examen d'une partie des comptes nationaux du Maroc entre 1980 et 2008. Les tableaux sont extraits du document établi par le Haut-Commissariat au Plan de ce pays en avril 2010. Le Produit Intérieur Brut (PIB) étant utilisé pour des notions parfois différentes en comptabilité nationale, il est précisé ici que celui qui servira de référence dans les calculs demandés correspond à la ligne « Produit intérieur brut » des tableaux 1 et 2. Il n'y a donc aucun calcul à envisager pour repérer les montants du PIB.

A partir du tableau 1 joint en annexe (*Ressources et emplois de biens et services à prix courants base 1998*), il vous est demandé de :

**Question 1**

Calculer l'évolution annuelle moyenne<sup>1</sup> entre 1980 et 2008 des trois grands indicateurs de la santé économique d'un pays :

- a) Le Produit Intérieur Brut (PIB)
- b) Les importations
- c) Les exportations
- d) Commenter ces évolutions

**Question 2**

- a) Calculer la part des importations et des exportations dans le PIB en 1980 et en 2008
- b) Commenter

---

<sup>1</sup> Il s'agit d'une moyenne géométrique

### **Question 3**

- a) Calculer l'évolution annuelle moyenne<sup>1</sup> du PIB sur chacune des périodes suivantes : 1980-1985, 1985-1990, 1990-1995, 1995-2000, 2000-2005, 2005-2008
- b) Commenter

### **Question 4**

- a) Calculer le solde commercial qui est la différence entre les exportations et les importations en 1980, 1990, 2000, 2005 et 2008
- b) Calculer la part du déficit commercial dans le PIB pour les mêmes années
- c) Commenter

### **Question 5**

- a) L'investissement est représenté par la Formation brute de Capital Fixe, calculer sa part dans le PIB pour les années 1980, 1990, 2000 et 2008
- b) Commenter

### **Question 6**

- a) A partir du tableau 2 joint en annexe (*Ressources et emplois de biens et services en volume prix chaînés base 1998*), calculer l'évolution annuelle moyenne<sup>1</sup> du PIB en volume sur chacune des périodes suivantes : 1980-1985, 1985-1990, 1990-1995, 1995-2000, 2000-2005, 2005-2008
- b) Commenter en mettant en regard les données de la question 6a avec celles de la question 3a

### **Question 7**

Estimer le taux d'inflation entre 2007 et 2008

---

<sup>1</sup> Il s'agit d'une moyenne géométrique

Tableau 1



COMPTES NATIONAUX 1980-2008

## 3.1 - Décomposition du produit intérieur brut

## 3.1.1 - Ressources et emplois de biens et services à prix courants : base 1998

	<i>En millions dhs</i>														
Opérations	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	
<b>Ressources</b>															
Produit intérieur brut	82 981	88 490	102 943	111 242	124 854	143 843	170 459	172 676	202 223	214 510	237 704	270 029	273 576	280 245	
Importations de biens et services	23 393	31 230	35 200	33 858	44 592	50 139	49 022	48 336	52 036	60 996	74 120	76 324	80 034	80 148	
<b>Total</b>	<b>106 374</b>	<b>119 719</b>	<b>138 143</b>	<b>145 100</b>	<b>169 447</b>	<b>193 982</b>	<b>219 482</b>	<b>221 012</b>	<b>254 260</b>	<b>275 506</b>	<b>311 824</b>	<b>346 353</b>	<b>353 610</b>	<b>360 393</b>	
<b>Emplois</b>															
Dépenses de consommation finale des ménages	51 310	55 612	63 928	70 822	78 898	89 242	106 647	106 859	119 534	130 463	142 623	170 389	171 674	174 460	
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	14 918	16 841	19 220	20 200	21 736	26 140	30 806	33 040	36 566	38 167	40 006	44 175	47 543	51 329	
Formation brute de capital fixe	21 071	26 228	30 306	28 940	30 207	34 832	38 397	36 815	43 336	51 413	59 426	64 509	65 192	68 504	
Variation de stocks	2 597	284	1 831	-974	5 343	5 552	5 092	3 641	2 451	5 513	8 695	4 609	5 445	1 627	
Exportations de biens et services	16 479	20 755	22 857	26 113	33 262	38 216	38 541	40 656	52 374	49 950	61 075	62 670	63 757	64 474	
<b>Total</b>	<b>106 374</b>	<b>119 719</b>	<b>138 143</b>	<b>145 100</b>	<b>169 447</b>	<b>193 982</b>	<b>219 483</b>	<b>221 012</b>	<b>254 260</b>	<b>275 506</b>	<b>311 825</b>	<b>346 353</b>	<b>353 611</b>	<b>360 393</b>	
Opérations	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
<b>Ressources</b>															
Produit intérieur brut	313 687	317 550	360 698	355 011	384 385	389 569	393 381	426 402	445 426	477 021	505 015	527 679	577 344	616 254	688 843
Importations de biens et services	85 191	95 432	93 453	100 027	108 033	115 467	131 198	136 202	143 696	150 229	173 342	200 071	229 084	276 477	346 119
<b>Total</b>	<b>398 878</b>	<b>412 982</b>	<b>454 151</b>	<b>455 038</b>	<b>492 418</b>	<b>505 036</b>	<b>524 579</b>	<b>562 604</b>	<b>589 122</b>	<b>627 250</b>	<b>678 357</b>	<b>727 750</b>	<b>806 428</b>	<b>892 731</b>	<b>1 034 962</b>
<b>Emplois</b>															
Dépenses de consommation finale des ménages	200 371	200 844	228 511	218 817	234 359	235 814	241 716	246 292	257 990	273 562	288 602	303 172	331 996	360 008	413 592
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	54 628	60 552	61 943	63 457	64 290	70 051	72 346	79 414	81 339	86 470	94 321	102 110	107 071	112 234	118 336
Formation brute de capital fixe	70 399	72 989	74 734	78 173	89 905	97 840	102 202	105 937	112 320	119 802	132 719	145 256	162 456	192 573	227 902
Variation de stocks	4 974	3 136	6 918	5 500	10 029	-1 214	-1 762	5 550	3 170	10 679	14 390	6 699	7 446	7 614	22 328
Exportations de biens et services	68 506	75 461	82 047	89 090	93 835	102 545	110 077	125 411	134 303	136 737	148 325	170 513	197 459	220 302	252 804
<b>Total</b>	<b>398 879</b>	<b>412 983</b>	<b>454 152</b>	<b>455 037</b>	<b>492 418</b>	<b>505 036</b>	<b>524 579</b>	<b>562 604</b>	<b>589 122</b>	<b>627 250</b>	<b>678 357</b>	<b>727 750</b>	<b>806 428</b>	<b>892 731</b>	<b>1 034 962</b>

Tableau 2

COMPTE NATIONAUX 1980-2008



## 3.1.4 - Ressources et emplois de biens et services en volume (prix chaînés, base 1998)

	<i>En millions dhs</i>														
Opérations	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	
<b>Ressources</b>															
Produit intérieur brut	188 879	185 807	204 710	206 317	219 252	231 026	253 301	250 092	280 578	288 536	296 583	318 965	309 691	306 585	
Importations de biens et services	51 801	55 512	56 285	53 279	57 446	59 147	57 866	62 916	65 561	70 915	77 523	81 295	89 480	84 720	
<b>Total</b>	<b>241 093</b>	<b>241 831</b>	<b>260 896</b>	<b>258 871</b>	<b>276 038</b>	<b>289 112</b>	<b>308 164</b>	<b>311 139</b>	<b>343 631</b>	<b>357 126</b>	<b>372 249</b>	<b>397 969</b>	<b>397 778</b>	<b>389 902</b>	
<b>Emplois</b>															
Dépenses de consommation finale des ménages	113 610	113 770	122 896	127 172	134 069	138 632	155 069	153 936	167 877	174 556	176 542	199 434	194 270	190 384	
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	34 801	36 677	39 341	39 364	40 325	44 567	48 849	51 427	55 521	55 485	53 929	56 448	58 189	59 593	
Formation brute de capital fixe	53 361	55 321	57 574	52 833	49 247	54 859	54 088	54 143	59 580	67 742	69 814	71 792	71 433	69 495	
Variation de stocks	6 831	498	2 521	-1 342	6 657	5 536	5 916	3 529	2 062	4 051	4 839	3 776	3 987	1 757	
Exportations de biens et services	33 797	36 019	38 679	42 056	44 388	45 071	44 834	48 657	58 936	55 506	65 070	66 572	69 703	69 813	
<b>Opérations</b>	<b>1994</b>	<b>1995</b>	<b>1996</b>	<b>1997</b>	<b>1998</b>	<b>1999</b>	<b>2000</b>	<b>2001</b>	<b>2002</b>	<b>2003</b>	<b>2004</b>	<b>2005</b>	<b>2006</b>	<b>2007</b>	<b>2008</b>
<b>Ressources</b>															
Produit intérieur brut	341 824	320 192	363 289	355 980	384 385	386 420	392 574	422 221	436 222	463 778	486 048	500 525	539 365	553 959	584 890
Importations de biens et services	84 237	96 902	91 303	100 027	108 033	115 673	124 474	126 173	134 297	143 805	157 985	173 206	187 337	215 488	239 033
<b>Total</b>	<b>424 256</b>	<b>416 765</b>	<b>454 333</b>	<b>456 007</b>	<b>492 418</b>	<b>502 093</b>	<b>516 995</b>	<b>548 038</b>	<b>570 355</b>	<b>607 445</b>	<b>643 974</b>	<b>674 107</b>	<b>727 155</b>	<b>772 283</b>	<b>828 182</b>
<b>Emplois</b>															
Dépenses de consommation finale des ménages	216 939	201 345	229 520	219 027	234 359	233 378	236 702	242 232	250 917	269 340	282 414	288 910	308 785	320 381	350 605
Dépenses de consommation finale des Administrations Publiques	61 474	62 084	63 034	63 653	64 290	68 450	69 278	72 521	72 942	74 536	77 778	80 530	82 834	86 402	90 590
Formation brute de capital fixe	67 782	73 882	74 420	79 366	89 905	98 472	101 200	102 045	109 528	117 990	127 892	137 369	150 652	172 195	192 357
Variation de stocks	3 513	2 269	4 456	5 128	10 029	-1 341	-2 119	6 517	5 063	17 918	21 353	9 802	9 264	8 629	14 323
Exportations de biens et services	76 161	78 655	83 492	89 090	93 835	103 134	111 961	126 637	133 796	134 656	143 104	162 126	180 966	190 357	188 319