

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1<sup>ère</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

**Attention !**

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

**Exercice n° 1**

1. Calculer, en  $x = 1$ , la dérivée de :  $x^2 \operatorname{Arc} \tan(x)$

2. Calculer  $I = \int_1^2 \frac{\operatorname{Log}(x)}{x} dx$ , où  $\operatorname{Log}$  désigne le logarithme décimal.

3. Résoudre l'équation :  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{t+1}{t+2} dt$

5. Résoudre l'inéquation  $\frac{x^2 - 2}{x - 1} \leq 0$

6. Donner l'équation de la droite dans le plan, qui passe par le point  $A(1, -1)$  et est parallèle au vecteur  $u(1, 2)$

7. Résoudre le système d'équations, où  $\operatorname{Ln}$  désigne le logarithme népérien :

$$\begin{cases} \operatorname{Ln} x + \operatorname{Ln} y = 2 \\ x + y = \frac{5}{2}e \end{cases}$$

8. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n$  et  $u_0 > 0$

9. Une course à pied en relais (3 équipiers) se déroule entre les communes de Rockville et Fieldville, distantes de 38 kms.

Le premier coureur doit parcourir 10 kms et sa vitesse est de 14 kms/heure, le deuxième coureur doit parcourir 13 kms et sa vitesse est de 17 kms/heure, et le troisième coureur doit parcourir 15 kms et sa vitesse est de 16 kms/heure. Quel sera le temps réalisé par ce relais ?

10. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$

### Exercice n° 2

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$  et  $u_0 = 1$

1. Montrer que  $(u_n)$  est une suite à termes strictement positifs.
2. Si la suite  $(u_n)$  est convergente, quelle est alors sa limite ?
3. Etudier les variations et tracer le graphe de la fonction numérique  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

4. Calculer l'aire comprise entre l'axe  $ox$ , le graphe de  $f$  et les droites d'équation  $x=1$  et  $x=2$ .
5. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice n° 3

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 + x^2}$$

1. Etudier les variations de  $f$ .
2. Tracer le graphe de  $f$ .
3. Préciser les points d'inflexion de son graphe.

4. Calculer  $I = \int_{-1}^1 (f(x) - 1) dx$

### Exercice n° 4

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par:

$$f(x) = 2x - \frac{\text{Ln}(x)}{x^2}$$

On note  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan, muni d'un repère orthogonal et  $\text{Ln}$  désigne le logarithme népérien.

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Démontrer que la courbe  $C$  admet une asymptote oblique  $D$ , et étudier la position relative de la courbe  $C$  par rapport à la droite  $D$ .
3. Etudier les variations de la fonction  $f$ .
4. Tracer la courbe  $C$ .
5. Calculer  $I_n = 2 \int_1^n \frac{\text{Ln}(x)}{x^2} dx$ , pour  $n$  entier strictement supérieur à 1.
6. Que représente  $I_n$  ?
7. Calculer la limite de  $I_n$ .

### Exercice n° 5

On dispose de deux « dés ».

Le premier dé est un cube composé de 6 faces identiques, dont trois faces portent le chiffre 1, deux faces portent le chiffre 2 et une face porte le chiffre 3.

Le deuxième dé est un parallélépipède de largeur 2 cm, de longueur 3 cm et de hauteur 4 cm. Les deux plus petites faces (superficie la plus petite) portent le chiffre 1, les deux faces moyennes le chiffre 2 et les deux plus grandes faces le chiffre 3. On jette les deux dés (qui forcément tombent sur une face) et on suppose que la probabilité de tomber sur une face est proportionnelle à sa surface.

Soit  $X$  la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus par les deux dés.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Quelle est la probabilité que  $X > 4$  ?
3. Ce jeu vous semble-t-il réaliste ?

### Exercice n° 6

On considère la suite de polynômes réels  $P_n$  définie par :  $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1$ , pour  $n \geq 2$ .

1. Calculer  $P_n(0)$  et  $P_n(1)$
2. Montrer que  $P_n$  admet une unique racine  $\alpha_n$  comprise entre 0 et 1 (on précisera la valeur exacte de  $\alpha_2$ )
3. Démontrer que, pour  $n \geq 2$  :  $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$
4. Étudier la convergence de la suite  $(\alpha_n)$
5. Démontrer que pour tout  $x \neq 1$ , on a :  $P_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x + 1}{x - 1}$  et en déduire que  $\alpha_n$  est solution d'une équation de degré  $n+1$ .
6. Comparer  $2\alpha_n - 1$  et  $\alpha_2^{n+1}$
7. En déduire la valeur de la limite de la suite  $(\alpha_n)$

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie A**

**ORDRE GÉNÉRAL**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.**

**Sujet n° 1**

L'intangibilité des frontières héritées de la colonisation a été consacrée par l'OUA en 1963. L'application de ce principe devrait-il être remis en question ? Peut-il connaître des aménagements selon les situations locales ?

**Sujet n° 2**

L'Histoire de l'Afrique apparaît comme un véritable enjeu. On ne compte plus les commentaires venus de tous horizons estimant que l'Afrique est peu ou prou un continent sans Histoire jusqu'au philosophe Friedrich Hegel estimant que « L'Afrique n'est pas une partie historique du monde ». D'où vient selon vous cette tendance récurrente des occidentaux à considérer que l'Afrique n'a pas d'Histoire ?

**Sujet n° 3**

Quelles seraient selon vous les conditions nécessaires pour que l'Afrique connaisse un développement industriel, commercial et financier au moins intra continental ?

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2<sup>ème</sup> COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

**Exercice n° 1**

On considère la fonction numérique  $f$  d'une variable réelle définie par :  $f(x) = (x^2 + 1)e^x$

1. Etudier les variations de  $f$  et sa convexité.
2. Tracer le graphe de  $f$ .
3. Calculer :  $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$
4. Pour quelle valeur du paramètre  $\alpha$  a-t-on  $I = \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2e - 3$  ?
5. On considère la fonction numérique  $g$  d'une variable réelle définie par :  $g(x) = (x^2 + 1)^k e^x$  où  $k$  est un nombre réel strictement supérieur à 1 dans cette question. Etudier ses variations.
6. Etudier la convexité de  $g$  pour  $k=1/2$ .

**Exercice n° 2**

On considère la suite  $(u_n)$  définie, pour  $n$  entier naturel, par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$

1. Tracer le graphe de la fonction  $f$  définie pour  $x \geq 1$  par :  $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$
2. Etudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$
4. Soit  $I_\alpha(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$ ,  $I_\alpha(x)$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ?

### Exercice n° 3

Soit  $f$  la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. On note encore  $f$  cette fonction prolongée.
2. Etudier la dérivabilité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.
3. Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , l'équation :  $f(x) = 0$

### Exercice n° 4

Soit  $f$  une fonction numérique d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = (1-k)^3 x^2 + (1+k)x^3,$$

où  $k$  est un paramètre réel.

Pour quelles valeurs de  $k$ , l'origine est-elle un extremum local pour  $f$  ?

### Exercice n° 5

Soient  $f$  et  $g$  deux applications numériques définies sur  $\mathbb{R}^{++}$  (ensemble des nombres réels strictement positifs), où  $f$  est convexe et  $g$  affine.

On suppose que :

- (1)  $\forall x > 0, f(x) \leq g(x)$
- (2)  $f(1) = g(1)$

Comparer  $f$  et  $g$ .

### Exercice n° 6

Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$

2.  $\int_1^2 x^2 \text{Log } x dx$ , où  $\text{Log}$  désigne le logarithme décimal.

3.  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 7} dx$

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie A**

**CONTRACTION DE TEXTE**

**(Durée de l'épreuve : 3 heures)**

**Ce texte est tiré du livre de Monsieur Frédéric LENOIR : intitulé : « L'AME DU MONDE » paru aux éditions NIL en mai 2012.**

**Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.**

**Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.**

### **Du sens de la vie**

Un sage prit la parole et dit : « Ô enfants des hommes, écoutez le premier noble enseignement sur le sens de la vie humaine.

La plupart des malheurs de l'humanité viennent du fait que bien des hommes, surtout ceux qui exercent le pouvoir et possèdent la richesse ne se sont jamais interrogés sur la signification de leur existence. Ils vivent suivant la pente de leurs pulsions et de leurs besoins matériels. Ils descendent, inconscients le fleuve de l'existence, telles des bûches ballotées par les eaux, sans jamais rien maîtriser du cours de leur vie.

A ce compte-là, même les cadavres jetés dans la rivière descendent plus vite que les vivants !

Mais est-il encore un Vivant, celui qui ne vit que selon les besoins immédiats de son corps et étouffe les questions et les besoins de son âme ?

Pourquoi sommes-nous sur terre ? Avons-nous chacun quelque chose de particulier à réaliser ? Les événements qui nous arrivent sont-ils seulement le fruit du hasard ou bien ont-ils une signification ? Avons-nous une destinée à accomplir ? Sommes-nous le jouet de nos instincts et de notre éducation ou bien pouvons-nous acquérir une vraie liberté ?

Et si tel est le cas, comment en faire bon usage ? Sur quels rochers fonder notre vie ? Peut-on atteindre un bonheur véritable et durable ? Comment nourrir notre âme autant que notre corps et comment faciliter la bonne entente de cet attelage de l'être humain ? Notre esprit disparaît-il avec le corps physique ?

... / ...Voici les questions que devrait se poser tout être humain lorsqu'il comprend qu'il n'est pas qu'un animal soumis aux lois universelles du plaisir ou du déplaisir, de l'attraction et de la répulsion ; lorsqu'il découvre qu'il possède un esprit ou une âme spirituelle, peu importe les mots utilisés, qui lui permettent de maîtriser son corps, ses émotions, ses pulsions.

La grandeur de l'être humain, c'est qu'il est le seul être vivant qui puisse s'interroger sur la signification de son existence et lui donner une direction, un but.

Mais malheureux l'homme qui n'a pas découvert le sanctuaire de l'esprit. Malheureux celui qui n'a d'autre préoccupation que de survivre !

Malheureux l'homme qui ne se pose jamais la question : comment vivre de manière proprement humaine ? Comment mener une vie bonne ? Qu'est ce qui est vraiment important et qu'est-ce qui ne l'est pas ?

Comment devenir pleinement moi-même et être utile aux autres ?

Comment réussir ma vie afin qu'à l'instant de ma mort, je puisse partir en paix et regarder derrière moi le cœur serein ?

Malheureux l'homme qui ne sait pas qu'il possède deux grands trésors à l'intérieur de lui-même : la clarté de l'esprit qui peut le rendre libre, et la bonté du cœur qui peut le rendre heureux.

Malheureux l'homme qui mène une existence semblable à celle des bêtes, enchaîné à ses instincts et seulement préoccupé des soucis matériels de la vie. Malheureux l'homme qui ne sait pas qu'il est un homme ».

Un sage prit la parole et dit : « La vie est un voyage. Comme les oiseaux nous sommes un jour appelés à quitter le nid de notre enfance pour voler de nos propres ailes. Nous allons découvrir l'amour et bien souvent fonder une famille. Nous allons apprendre un métier pour nous réaliser dans un travail et subvenir à nos besoins matériels et à ceux de nos enfants.

Tout cela est bien. Mais tout cela n'est pas suffisant. Au long du voyage de la vie, nous allons rencontrer bien des obstacles. La maladie peut survenir, l'amour peut s'éclipser, nos proches vont mourir, nous ne sommes jamais sûrs de toujours pouvoir faire face aux difficultés matérielles de l'existence.

Nous allons aussi découvrir combien il est difficile d'aimer, combien il est rare de trouver un travail qui nous épanouisse en profondeur, combien nous sommes souvent pris dans des contradictions intérieures, dans des peurs, des colères, des frustrations, des jalousies, des découragements.

Au fil de la vie, nous allons devoir apprendre à vivre. Non pas à survivre, mais à vivre. A vivre pleinement, les yeux ouverts avec conscience et attention. A vivre en étant capable de choisir les bonnes personnes pour partager notre quotidien, en évitant de commettre les mêmes erreurs que dans le passé, en se donnant les moyens d'être véritablement soi-même et heureux, autant que faire se peut.

Tout cela s'apprend avec le temps et l'expérience. Mais il est infiniment précieux d'utiliser au plus tôt la clarté de notre esprit pour nous guider sur le chemin de la vie. Bien des égarements, des erreurs, des mauvais choix et des drames pourront être évités.

Ecoutez l'histoire de cette femme tenant son enfant dans les bras.

Passant devant une grotte, elle entend une voix mystérieuse qui lui dit : entre et prends tout ce que tu veux. Mais souviens-toi d'une chose : quand tu seras ressortie, une porte se refermera à tout jamais. Profite de l'opportunité, mais n'oublie pas le plus important.

La femme pénètre dans la grotte et y découvre un fabuleux trésor. Fascinée par l'or, les diamants et les bijoux, elle dépose son enfant sur le sol et s'empare de tout ce qu'elle peut. Elle rêve à tout ce qu'elle va pouvoir faire de ces richesses. La voix mystérieuse lui dit : « Le temps est écoulé, n'oublie pas le plus important. » A ces mots, la femme chargée d'or et de pierres précieuses court hors de la cavité dont la porte se ferme derrière elle à tout jamais. Elle admire son trésor, et se souvient alors, seulement, de son enfant qu'elle a oublié à l'intérieur.

Combien d'êtres humains passent l'essentiel de leur vie à se soucier de choses matérielles ou futiles et oublient de prendre le temps de vivre les expériences les plus essentielles : l'amour, l'amitié, l'activité créatrice, la contemplation de la beauté du monde ? Ils ne sont ni bêtes ni méchants, mais ignorants. Ignorants de ce que la vie peut donner de meilleur et cela ne coûte rien ! Le superflu est onéreux, mais l'essentiel est offert. Encore faut-il le savoir.

Et combien aussi préfèrent suivre la masse de ceux qui obéissent aux modes de leur époque ? Apprenez, ô enfants des hommes, à cheminer sur votre voie, celle qui est bonne pour vous, celle qui vous est destinée et qui réjouira votre cœur. »

## **De la vraie liberté**

Un chant d'oiseau déchira le ciel. Alors un sage prit la parole et dit : « Ecoutez, ô enfants des hommes, le noble enseignement sur la connaissance de soi et la liberté. Tout homme aspire à être libre et c'est là une grande et belle ambition, car que vaut la vie d'un prisonnier, ou celle d'un esclave ?

Il existe toutefois de nombreuses formes de prisons ou de servitudes. La plus subtile et la plus pernicieuse, celle que bien peu d'homme considèrent et dénoncent, c'est la prison intérieure de l'homme esclave de lui-même.

Est-il libre l'homme qui s'adonne au jeu, au point d'en perdre tous ses biens ? Est-il libre l'homme qui passe plusieurs heures par jour devant son écran, sans pouvoir décrocher ? Est-il libre l'homme qui se laisse emporter par une violente crise de jalousie, allant jusqu'à frapper sa femme ? Est-il libre l'homme qui est tellement angoissé qu'il ne pourra parler en public, ou celui qui ne pourra rester dans une pièce où il a vu une araignée ?

Nous sommes tous plus ou moins prisonniers de nos peurs, de nos pulsions, de notre caractère, de nos habitudes, de nos émotions. La plupart de nos actions et de nos choix sont mus par ces tendances qui nous dominent. Esclaves de nous-mêmes, nous sommes les seuls à pouvoir nous libérer de cette prison intérieure.

Le début de la libération passe par la connaissance de soi. C'est par une introspection, une fine observation de notre comportement, de nos réactions, de l'affleurement de nos émotions que nous parvenons progressivement à nous connaître et à comprendre les causes profondes de nos actions.

Travailler sur nous-mêmes, corriger nos réactions, modifier nos réflexes spontanés ou nos mauvaises habitudes demande effort et volonté. Mais c'est le prix à payer pour gagner notre liberté intérieure.

Car l'homme qui ne se connaît pas est comme aveugle. Il marche sans assurance et risque à tout instant de heurter un obstacle ou de s'égarer.

C'est pourquoi le commencement de la sagesse, c'est de tourner son regard vers soi-même et d'apprendre qui nous sommes, quels sont nos motivations, nos besoins, nos réactions, nos attirances et nos répulsions, nos habitudes, nos addictions, nos émotions les plus fortes et quelles en sont leurs causes. Comme le disait un ancien maître de la sagesse : « On ne naît pas libre, on le devient. »

... / ...Un sage prit la parole et dit : « L'esclavage intérieur ne vient pas seulement de nos pulsions et de nos émotions, mais aussi de l'attachement que nous portons aux objets qui nous entourent.

La dépendance à l'égard des choses matérielles est un des esclavages les plus répandus de nos jours. Non seulement nous voulons toujours plus et toujours mieux, mais nous n'arrivons pas à nous passer de ces choses qui n'existaient pas la veille.

La plupart des humains ont pu vivre heureux pendant des millénaires sans voiture et sans téléphone portable, sans électricité et sans Internet, sans télévision.

Mais imaginons aujourd'hui quelqu'un qui partirait vivre dans un lieu sans rien de tout cela. On le prendrait pour un fou et nul n'aurait envie de le suivre, car nous nous sommes tant habitués à ce confort et à ces objets qu'ils nous semblent indispensables à notre équilibre, voire à notre survie.

Il nous serait fort utile au contraire d'apprendre à nous en détacher. A en user librement sans addiction, en sachant parfois nous en séparer volontairement.

Possédez des objets mais n'en soyez pas possédés. Usez des biens matériels sans en être esclaves. Voilà un pas important vers la vraie liberté.

Être libre, c'est aussi ne pas agir en fonction du regard d'autrui. Or bien souvent nos actions ou nos réactions sont mues par le désir de plaire ou de ne pas déplaire, de se conformer aux usages communs ou bien au contraire de se rebeller contre eux, d'attirer l'attention ou de rester discrets.

Agissant ainsi, nous sommes prisonniers du regard des autres. La sagesse consiste aussi à se libérer de ce regard pesant, bien souvent si intériorisé que nous n'en avons pas conscience.

Voici l'histoire d'un enfant qui demande à son père le secret du bonheur.

Alors le père dit à son fils de le suivre ; ils sortent de leur maison, le père sur leur vieil âne, le fils à pied. Et les gens du village de s'indigner : « Quel mauvais père d'obliger ainsi son fils d'aller à pied !

Tu as entendu mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le lendemain, le père installe son fils sur l'âne tandis que lui marche à côté. Les gens du village lancent alors : « Quel fils indigne qui ne respecte pas son vieux père et le laisse aller à pied !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le jour suivant ils montent tous les deux sur l'âne. Les villageois de dire : « Ils n'ont donc aucun cœur pour surcharger ainsi cette pauvre bête !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Le jour suivant ils partent en portant eux-mêmes leurs affaires, l'âne marchant derrière eux. Les gens du village commentent de plus belle : « voilà qu'ils portent eux-mêmes leurs bagages maintenant ! C'est le monde à l'envers !

Tu as entendu, mon fils ? Rentrons à la maison. »

Arrivés à la maison, le père dit à son fils : « Tu me demandais le secret du bonheur ? Peu importe ce que tu fais, il y aura toujours quelque'un pour y trouver à redire. Fais ce que tu aimes ou ce que tu penses juste de faire, et tu seras heureux ! »

Nous avons tous besoin de reconnaissance, nous ne supportons pas qu'on nous critique et qu'on nous insulte. Ce besoin et cette aversion règnent en tyrans sur notre âme. Nous sommes sans cesse en quête d'un regard approbateur, d'un compliment, d'une gratification, d'un prix honorifique, d'une renommée sociale ou d'une bonne réputation.

A l'inverse, nous sommes bouleversés par une critique ou un reproche, blessés par une insulte même si elle vient d'un parfait inconnu, mis à terre par un échec qui nuit à notre réputation ou à notre prestige.

Ce comportement est normal dans l'enfance. Un enfant a besoin d'être conforté, encouragé, récompensé pour ses efforts. De même, il est normal qu'il vive mal les reproches qui atteignent son égo.

Mais ce qui est ordinaire chez l'enfant ne l'est pas chez l'adulte. Il est nécessaire de prêter attention à l'avis d'autrui, cependant un être humain doit pouvoir acquérir assez de confiance en lui pour ne pas constamment se soucier de l'approbation ou des critiques d'autrui.

Hélas, bien des hommes n'ont pas su ou n'ont pas pu acquérir cette confiance et ils continuent de vivre comme des enfants. La confiance et le juste amour de soi sont nécessaires à la croissance de l'être humain, à sa liberté et à son bonheur.

... / ...Apprenez, ô enfants des hommes à passer de l'ignorance à la connaissance.  
Car l'ignorance est la cause de la plupart des maux.

Développez votre intelligence et vos connaissances pour apprendre à discerner.  
Toute votre vie, vous aurez à discerner le vrai du faux, le juste de l'injuste, le positif du négatif, l'utile de l'inutile, le nécessaire du superflu. La connaissance de vous-mêmes vous rendra libres et capables de faire les justes choix pour mener une vie bonne.

Mais rappelez-vous que la connaissance de soi est la plus importante. C'est pourquoi un ancien maître de la sagesse disait : « Connais-toi toi-même et tu connaîtras le monde et les dieux. »