CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ANNÉE IUT

Session de juillet 2010

Filière PFTIN et PFTI
Épreuve de Mathématiques
Durée 3 heures

Exercice 1 : (**2 points**)
Mettre sous la forme $a+\mathrm{i}b$ les quantités suivantes :

a) $\left(\dfrac{4\mathrm{i}^{11}-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2$

b) $\dfrac{1}{5-3\mathrm{i}}-\frac{1}{5+3\mathrm{i}}$

Exercice 2 : (**2 pts**)
Soit $f(x)=1+x+\sin(x)$
Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Exercice 3 : (**2 pts**)
Calculer les limites
$I_1=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$ $\quad I_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$

Exercice 4 : (**3 pts**)
Parmi les fonctions suivantes ,dites lesquelles sont paires et lesquelles sont impaires

$Y_1=\dfrac{\tan x-x}{x^3\cos x}$ $\quad Y_2=\dfrac{\sin^2 2x-\cos 3x}{\tan x}$ $\quad Y_3=x^2-1+\sin^2 x$
$Y_4=\dfrac{x-1}{\cos(x+1)}+\cos x$
$Y_5=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{x\tan x}$ $\quad Y_6=\dfrac{x^3-1}{x+1}\tan x$

Exercice 5 : (**3 points**)
Soit la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{2e^x}{e^x-1}$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère du plan.*

1. *Donner l'ensemble de définition* D_g *de* g.
2. *Quelles sont les solutions de l'équation* $g(x)=3$.
3. *Calculer la limite de* g *en* $-\infty$ *puis en* $+\infty$.
4. *Calculer la primitive G de la fonction g dans l'intervalle* $]1;+\infty[$

Exercice 6 : (**3 points**)
On considère la suite $(U_n)_{n\geq1}$ *définie par*

$$
\begin{aligned}
U_n &= \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
& et \\
V_n &= U_n + \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

1. *Montrer que la suite (u_n) et (v_n) sont adjacentes.Soit I leur limite*
2. *Donner un entier n_0 pour lequel l'encadrement de I par U_{n_0} et V_{n_0} est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}*

Exercice 7 : ***(5 points)***

Une boite contient 10 boules.Sur chacune d'elle on a inscrit un nombre suivant le tableau ci-dessous :

Nombre inscrit	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

Un joueur mise 10 francs,tire un boule au hasard , et reçois la somme (en francs) inscrite sur la boule.

1. *Le joueur joue une fois.On appele p_1 la probabilité qu'il perde de l'argent(c'est-à-dire qu'il reçoit moins de 10 francs à l'issue du tirage) et p_2 la probabilité qu'il reçoit plus 10 francs .Donner $p_1$et p_2.*
2. *soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le ≪ gain≫ du joueur (une perte est un ≪ gain≫ négatif).Par exemple : si le joueur tire le nombre 12 ,son ≪ gain≫ est +2,s'il tire le 6 ,son ≪ gain≫ est -4.*
   a. *Quelles sont les valeurs prise par la variable aléatoire X.*
   b. *Présenter la loi de probabilité de X dans un tableau.*
   c. *Calculer son espérance mathématique $E(X)$*
      Que représente $E(X)$ pour le joueur.
   d. *Calculer la variance et l'écart-type de X.*
3. *il s'agit maintenant,en changeant le nombre inscrit sur une boule,de rendre ce jeu équitable (c'est-à-dire que l'espérance mathématique de la variable aléatoire associée doit etre nulle).Proposer une solution.*