CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ***ANNÉE IUT***
Session de Juillet 2011

Filière GLT,GAPMO,OCA
Épreuve de Mathématiques
Durée 3 heures

Exercice 1 *(**4 points**)*
Calculer la limite de chacune des fonction ci-dessous

$$f(x) = \frac{4x^3+5}{x+12} \text{ lorsque } x \to +\infty \qquad h(x) = \frac{\sin x}{2x} \text{ lorsque } x \to 0$$

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} \text{ lorsque } x \to -1 \qquad I(x) = \frac{\cos x}{2x+3} \text{ lorsque } x \to +\infty$$

Exercice 2 : *(**3 points**)*

Soit (U_n) *la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 & = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases} \quad \text{avec } f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

1. *Démontrer que , pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a :* $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
2. *En déduire que la suite* (u_n) *converge.*
3. *Démontrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $\left|u_{n+1}-1\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n-1\right|$

Exercice 3 : *(**4 points**)*
Une urne contient huit boule blanches et deux boules rouges . Un joueur extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables .

1. *A l'issue du tirage de trois boules*
   - *si aucune n'est rouge, le joueur perd 10 francs*
   - *si une seule boule est rouge, le joueur gagne 5 francs*
   - *si deux boules sont rouges, le joueur gagne 20 francs*

   Soit X *la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue d'un tirage.*
   Donner la loi de probabilité de X. *Calculer l'espérance mathématique* $E(X)$
2. *Le joueur joue deux fois de suite selon les mêmes règles en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les trois boules extraites.*
   Soit Y *la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue des deux tirages.*
   Donner les valeurs possible de Y.

Déterminer la probabilité que le joueur gagne exactement 10 francs, à l'issue des deux parties.

Problème : *(* ***9 points****)*

On désigne par f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$.
On note C_f sa courbe representative.

1. *Après avoir donné le domaine de définition de $f(x)$, étudier les variations de f en $-\infty$ et en $+\infty$ .Preciser les éventuelles asymptotes .*
2. *Démontrer que f se prolonge par continuité en 0. Que vaut $f(0)$?*
3. *Étudier la serviabilité de f en 0.*
4. *Calculer la dérivée f de f et préciser son signe.*
5. *En déduire que f est croissante sur $\mathbb{R}$*
6. *Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d' abscisse 0.*
7. *Tracer, dans un repère orthogonal la droite T puis la courbe C_f de la fonction f*