CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ANNÉE IUT
Session d'octobre 2010

Filière Génie informatique
Épreuve de Spécialité
Durée 3 heures

Exercice 1 FONCTION NUMÉRIQUE D'UNE VARIABLE RÉELLE

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = x + (|4x^2 - 1|)^{\frac{1}{2}}$$

et appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 1cm$

1. *Étudier la continuité de f.*
2. *Étudier la dérivabilité de f, en particulier en $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$ .Calculer la dérivée de f sur chaque intervalle ou elle est derivable.*
3. *Démontrer les équivalences suivantes :*
   a/ $(4x^2-1)^{\frac{1}{2}} + 4x < 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{1}{2}]$
   b/ $(1-4x^2)^{\frac{1}{2}} - 4x > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{5}}]$
   En déduire le signe de $f'(x)$
4. a. *Calculer $\lim f(x)$ quand $x \to -\infty$ et $\lim f(x)$ quand $x \to +\infty$ .Dresser le tableau de variation de $f(x)$.*
   b. *Calculer $\lim[f(x)+x]$ quand $x \to -\infty$ $\lim[f(x)-3x]$ quand $x \to +\infty$.*
   En déduire que la courbe de (C) admet deux asymptotes, $y = -x$ et $y = 3x$.
   Tracer la courbe de (C)

Exercice 2 SUITES NUMÉRIQUES

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies, pour tout entier naturel n par :
$U_n = \frac{2^n}{n!}$ *et* $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

1. *Exprimer V_n en fonction de n puis montrer que (V_n) est décroissante.*
2. *En déduire que, pour tout $n \geq 3$, on a $U_{n+1} \leq \frac{U_n}{2}$*
3. *Monter par récurrence sur n ,que pour tout $n \geq 3$, on a : $U_n \leq (\frac{1}{2})^{n-3} U_3$.*
4. *En déduire la limite de (U_n) quand n tend vers l'infini.*
5. *On pose pour tout entier naturel n : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.*
   Monter que S_n est majorée par $U_0 + U_1 + U_2 + 2U_3$.
   En déduire un encadrement de S_n.

Exercice 3 NOMBRES COMPLEXES

Soient a et b deux nombres réel,on considère les nombres complexes Z et Z' de module 1 et d'argument respectifs a et b :

1. *Montrer en utilisant la forme exponentielle de Z et Z', que $\frac{(Z+Z')^2}{ZZ'}$ est un réel positif ou nul.*
2. *En déduire que $Arg(Z+Z') = \frac{(Arg|Z|+Arg|Z'|)}{2}$*
3. *On appelle M et M' les images de Z et Z' dans le plan muni d'un repère ortonormé direct de centre O et N le point tel que $OMNM'$ soit un parallélogramme.Interprèter géométriquement l'égalité précédente à l'aide de ces points.*