

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNÉE IUT
Session de juillet 2011

Filière PFTIN
Épreuve de Spécialité
Durée 3 heures



Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

Exercice 2

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f puis vérifié que, pour la recherche de la limite de f en $+\infty$ on se trouve en présence d'une indétermination.
2. Pour lever l'indétermination, on considère la fonction g

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} + x - 1.$$

- a. pour tout $x \in D_f$ calculer le produit $f(x) \cdot g(x)$
- b. Quelle est la limite de g' en $+\infty$?
- c. Démontrer que pour tout x de $[2; +\infty[$, $g(x) > 0$
- d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 3

1. Déterminer la forme algébrique, puis une forme trigonométrique du nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

2. En déduire les valeurs exactes de : $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int \frac{e^2 x}{\sqrt{e^x+1}} dx$

2. $\int \frac{e^x}{e^2 x + 2e^x + 1} dx$

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus 1$ par : $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout x distinct de 1
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$
2. Étudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis déterminer la dérivée f' de f .
Dresser le tableau de variation de f .
3. Quelles sont les droites asymptotes à (C) ?
Préciser la position de (C) par rapport à son asymptote oblique.
4. Démontrer que (C) admet un centre de symétrie.
5. Tracer la courbe (C) et ses éléments remarquables.