CONCOURS D'ENTREE EN $1^{ère}$ ANNÉE IUT
Session de juillet 2010

Filière Génie informatique
Épreuve de Spécialité
Durée 3 heures

Exercice 1
Dans un plan complexe rapporté à un repère orthogonal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ *(unité graphiques* $2cm$*),on considère les points A, B, et C d'affixe respectives* $Z_A = 2$, $Z_B = 1 + i\sqrt{3}$ *et* $Z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1. a. *Donner la forme exponentielle de* Z_B *puis de* Z_C
   b. *Placer les points A, B et C*
2. *Déterminer la nature du quadrilatère* $OABC$. *Déterminer et construire l'ensemble D des points M du plan tel que* $|Z| = |Z - 2|$.

Exercice 2
PARTIE A : Etude d'une fonction

Soit f *la fonction définie sur l'intervalle* $[0; +\infty[$ *par* $f(x) = x\ln(x+1)$.

1. a. *Montrer que la fonction* f *est strictement croissante sur l'intervalle* $[0; +\infty[$
   b. *Donner la courbe représentative* (C) *de* f *dans un repère orthogonal* $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   c. *l'axe des abscisses est-il tangent à la courbe* (C) *au point 0.*
2. *On pose* $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$
   a. *Déterminer trois points a, b et c tel que , pour tout* $x \neq -1$

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

   b. *Calculer I.*
3. *A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2 calculer, en unité d'aires , l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe* (C) *et les droites d'équations* $x = 0$, $x = 1$ *et* $y = 0$ '
4. *Montrer que l'équation* $f(x) = 0,25$ *admet une solution dans l'intervalle* $[0; 1]$ *. on note* α *cette solution .Donner un encadrement de* α *d'amplitude* 10^{-2}

PARTIE B : Etude d'une suite
La suite (U_n) *est définie sur* $\mathbb{N}$ *par* $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$

1. *Déterminer le sens de variation de la suite* (U_n)*,la suite* (U_n) *converge t-elle ?*

2. *Déterminer que pour tout entier naturel n non nul,* $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$
En déduire la limite de la suite U_n

Exercice 3

La durée de vie d'un robot, exprimée en année, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ *avec* $\lambda > 0$*.Ainci , la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à :*$P(X \leq t) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. *Déterminer* λ *,arrondi à* 10^{-2} *près, pour que la probabilité* $P(X \geq 6)$ *soit egale à* 0.3
Pour la suite de l'exercice , on prendra $\lambda = 0.2$

2. *A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la premiere fois est-elle de 0,5 ?*
3. *Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux première années est de* $e^{-0,4}$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$*.On s'interesse aux fonctions derivable sur* $[0;+\infty[$ *vérifiant les conditions :*

$$\begin{cases} \forall x \in [0;+\infty[, \quad f'(x) = 4 - (f(x))^2 \\ \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On admet qu'une fonction vérifiant ces conditions existe.Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.On obtient ainsi une suite de point notés (M_n)*, d'abscisse* x_n *et d'ordonnée* y_n *telles que :*

$$\begin{cases} x_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + 0,2 \\ \\ y_0 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 \end{cases}$$

1. a. *Les coordonnée des premiers points sont consignés dans le tableau cidessous :*

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
x_n	*0*	*0,2*	*0,4*					
y_n	*0*	*0,8000*	*1,4720*					

Compléter ce tableau, On donnera les résultats à 10^{-4}

b. *Placer sur un graphique les points* M_n *pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.*

c. *D'après ce graphique , que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite* (y_n) *et sur sa convergence ?*

2. a. *Pour x réel, on pose* $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$.*Montrer que si* $x \in [0,2]$ *alors* $p(x) \in [0,2]$.

b. *Montrer que pour tout entier naturel* n, $0 \leq y_n \leq 2$.

c. *Étudier le sens de variation de la suite* (y_n).

d. *La suite* (y_n) *est-elle convergente ?*